J. QUINET

curso elemental de matemáticas superiores

tomo

5

las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones

Curso Elemental de Matemáticas Superiores

TOMO V

Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones

OBRAS DEL MISMO AUTOR PUBLICADAS POR

PARANINFO

CURSO ELEMENTAL DE MATEMATICAS SUPERIORES

TOMO I

Complementos de álgebra. Las derivadas y sus aplicaciones, con 400 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO II

Desarrollos en serie. Cálculo de complejos. Cálculo diferencial, con 700 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO III

Cálculo integral y primeras aplicaciones, con 450 ejercicios y problemas a resolver.

TOMO IV

Continuación del cálculo integral y aplicaciones, con 290 ejercicios y problemas a resolver.

Cálculo integral, complementos y aplicaciones.
Cálculo de los momentos de inercia.
Algunas aplicaciones de las integrales.
La serie de *Fourier*, con *ejemplos detallados* de desarrollos.
Integración gráfica y cálculo aproximado de una integral.
Integrales curvilíneas.
Integración de diferenciales totales.
Integrales múltiples. Integrales dobles. Nociones sobre integrales triples.

TOMO V

Ecuaciones diferenciales y aplicaciones, con 300 ejercicios y problemas a resolver.

Ecuaciones de primer y segundo orden, tipos diversos, con numerosos ejemplos.
48 ejemplos de aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales a problemas (mecánica, física, electricidad, termodinámica, resistencia de materiales, etc.).
Ecuaciones en derivadas parciales (aplicación a las cuerdas vibrantes y a la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de las líneas).
Introducción al estudio del potencial, y al estudio de los campos.

TOMO VI, con 782 ejercicios y problemas a resolver.

Geometría analítica plana.
Estudio de las cónicas y aplicaciones.
Trazado de curvas con numerosos ejemplos detallados.
Algunas aplicaciones físicas de las cónicas.

TEORIA Y PRACTICA DE LOS CIRCUITOS ELECTRONICOS Y DE LOS AMPLIFICADORES

TOMO I

Teoría y aplicaciones del cálculo de complejos al estudio de los circuitos de electrónica.

TOMO II

Los amplificadores HF y BF. Los osciladores y la modulación. Los filtros y los puentes de medida.

TOMO III

Estudio general de la propagación de la corriente HF a lo largo de las líneas y aplicaciones. Antenas. — Ecuaciones de Maxwell y aplicaciones.

SERIE POLITECNICA

Curso Elemental de Matemáticas Superiores

Cálculo diferencial e integral y Geometría analítica plana con un gran número de ejemplos y aplicaciones

por

J. QUINET

Ingeniero de la Escuela Superior de Electricidad
Profesor de la Escuela Nacional de Radioelectricidad de Clichy
Profesor honorario de Matemáticas generales de la Escuela Central de T.S.H.

Prólogo de

R. BARTHÉLEMY

Miembro de la Academia de Ciencias

TOMO V
Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones

De uso para:
Ingenieros, alumnos-ingenieros, Técnicos diversos, estudiantes

1967

PARANINFO

MADRID

Traducido por
ANGEL CALAVIA JAIME

© 1965 DUNOD

Depósito Legal: Z. 336.-1966

PARANINFO Meléndez Valdés, 14 y 65 — MADRID (15)

Cometa, S. A. - León XIII, 24 - Zaragoza, 1967

PROLOGO

M. J. Quinet es un profesor a quien aprecio desde hace una treintena de años. Le habría sido fácil obtener para su obra de Matemáticas superiores, algunas frases de hombres dedicados a las artes, de los cuales hay muchos e importantes en Francia, pero se ha contentado con utilizar a uno como yo, que no sabe juzgar las matemáticas, sino que trata de servirse de ellas.

No estoy particularmente calificado para presentar la obra de un especialista, y si, no obstante, he aceptado escribir este prólogo, se debe a que J. Quinet, Profesor de Matemáticas, ha comenzado por ser un experto en Electricidad, y hoy lo es aún más.

Esto explica la atrayente forma que da a sus exposiciones, consideradas a menudo como áridas.

Sin abandonar la línea ni el rigor de la enseñanza clásica, continúa dando las mayores satisfacciones a los que, como él, aman las matemáticas. Muestra ya, en el transcurso del programa, y sin tener que llegar al fin, para lo que sirven las fórmulas de álgebra respecto a la resolución de los problemas de física.

El estudiante, el futuro ingeniero, se da cuenta entonces de la necesidad de este bagaje intelectual, sin el cual, a pesar de sus dones intuitivos o inventivos no pasaría rápidamente de ciertos límites. Tiene la idea de que este prodigioso esfuerzo del pensamiento, realizado desde hace algunos siglos, no es una obra de aficionado, útil solamente para llenar el espíritu y pasar por los exámenes, sino que es una de las bases de su profesión.

Prevista para un curso de una Escuela de Radioelectricidad, la obra de M. J. Quinet está orientada evidentemente hacia los campos de las aplicaciones eléctricas, y me apresuro a lamentar, leyéndola, no haber dispuesto de la misma en 1907, cuando preparaba solo, en provincias, el examen del E.S.E., cuando las matemáticas pertenecían al apartado de «Especiales», donde me veía incapaz de hacer las necesarias selecciones.

M. J. Quinet no olvida, empero, la Mecánica, y construye sólidas bases para lo que se propondrá. Los estudios de series, el desarrollo de Fourier, conducen, en efecto, a los alrededores del cálculo simbólico, y no se da un gran salto entre las soluciones presentadas de ecuaciones diferenciales y las ecuaciones de Bessel.

Este es el designio al que hago alusión y los estudios que entran ahora en la técnica del ingeniero de circuitos y de ondas centimétricas. Aunque no se puede abarcar en un libro dedicado a matemáticas elementales el colosal edificio de los cálculos de la física moderna. M. J. Quinet nos conduce muy cerca de él, dándonos los medios para aportar una solución a la mayor parte de los problemas propuestos al ingeniero, al que proporciona excelentes trampolines de lanzamiento.

Deseo que nos invite, en trabajos posteriores, a efectuar algunas incursiones hacia nuevos horizontes; todos sus alumnos y amigos le seguiremos con interés.

René BARTHÉLEMY,
Miembro de la Academia de Ciencias.

"En el campo de la ciencia, el azar sólo favorece a los espíritus que están preparados."

PASTEUR.

INTRODUCCION

Las ecuaciones diferenciales constituyen la cúspide del magnífico edificio formado por el cálculo diferencial e integral.

El cálculo diferencial sirve, sobre todo (no únicamente), para convertir los problemas en ecuaciones; el cálculo integral permite su resolución y las ecuaciones diferenciales la obtención de las leyes de los fenómenos y las fórmulas que los registran.

— En este Tomo V de nuestro *Curso Elemental de Matemáticas Superiores*, se encontrará primeramente el estudio pormenorizado de las ecuaciones diferenciales de primero y segundo orden, con numerosos ejemplos. Se ha utilizado sistemáticamente el magnífico y poderoso método de LAGRANGE, o método de variación de constantes.

— Inmediatamente después del estudio teórico, se exponen con detalle gran número de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a los problemas de Física, Mecánica, Electricidad, Termodinámica, Radio y Resistencia de materiales, para mostrar al lector el inmenso campo de aplicación de las ecuaciones diferenciales, y también para ilustrar con ejemplos concretos la forma de utilizarlas.

— Hemos creído útil, sobre todo para los alumnos y todos los que consideran las matemáticas como un medio y no como un fin, no detenernos en consideraciones muy teóricas, sino antes estudiar y desarrollar las ecuaciones más frecuentes y más útiles en la práctica, y dar numerosos ejemplos concretos de sus aplicaciones. Aunque esta sistemática nos aleja bastante del plan de las obras clásicas de Matemáticas Superiores, hemos pensado que así la obra es útil, y, por por otra parte, nos ha animado a seguir este camino las cartas recibidas después de la publicación de los primeros tomos.

— Se encontrará a continuación el estudio de ecuaciones con derivadas parciales de segundo orden con dos importantes aplicaciones, expuestas con detalle, de la ecuación de las cuerdas vibrantes y de

la ecuación de la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de las líneas, sirviendo de base a la propagación de corrientes telefónicas y de alta frecuencia, así como a la teoría de las antenas de Radio, Televisión y Radar.

— Por último, terminamos con dos importantes capítulos: uno sobre el potencial «newtoniano», que sirve como introducción al estudio del potencial, otro dedicado al estudio de los campos en general, que sirve de introducción a las célebres ecuaciones de MAXWELL y a todo un grupo de ecuaciones análogas.

— El lector verá así, en forma tangible, cuál es el inmenso campo de las ecuaciones diferenciales, campo que se extiende por todas partes en la ciencia moderna, y que vuelve a encontrarse actualmente en esta nueva maravilla que se llama microscopio electrónico, en relación con el cual el Director honorario de la Investigación científica de Francia, M. G. DUPOUY, miembro del Instituto, dijo: «...los progresos consumados en nuestros días son tan maravillosos que levantan nuestro legítimo entusiasmo.»

— Agradezco de nuevo, calurosamente, a M. CHAUSSIN, profesor de la Escuela Normal Superior de Enseñanza técnica, haber releído este volumen y aconsejado algunas modificaciones en él, y a MM. GIROUX y DIEUDÉ, ingenieros, así como a M. QUINQUETON, Director adjunto del Instituto técnico profesional, que hayan comprobado todos los cálculos y corregido las pruebas del Tomo V. Les estoy infinitamente reconocido.

— Finalmente, agradezco muy en particular a la Editorial PARANINFO el cuidado con el que esta obra ha sido impresa, diseñada y editada. Los lectores estarán seguramente de acuerdo con el autor en apreciar estos hechos que, sin duda, contribuirán a hacer la lectura de este libro más agradable y provechosa.

J. Q.

Nota a la tercera edición

En esta tercera edición, corregida y aumentada, figura al final una lista-resumen de todas las fórmulas del Tomo V, así como 300 ejercicios y problemas para resolver, clasificados por capítulos, a fin de que el lector pueda, por su trabajo personal, aplicar las teorías del curso.

Las fórmulas de electricidad están de acuerdo con el sistema SI.

J. Q.

INDICE DE MATERIAS

Capítulo primero

Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1. Generalidades ... *Pág.* 17
1.2. Teorema I ... 18
1.3. Teorema II ... 19
1.4. Clasificación de las ecuaciones de primer orden ... 22
1.5. Primer tipo: ecuaciones en las que pueden separarse las variables 22
1.6. Segundo tipo: ecuaciones homogéneas ... 24
1.7. Tercer tipo: ecuaciones lineales ... 26
1.8. Primer caso: ecuaciones sin segundo miembro ... 27
1.9. Caso particular: ecuaciones lineales con coeficientes constantes y segundo miembro constante ... 28
1.10. Segundo caso: ecuaciones lineales con segundo miembro variable. 31
Tipos especiales de ecuaciones de primer orden ... 34
1.11. Ecuaciones de Bernoulli ... 34
1.12. Ecuaciones de Clairaut ... 39
1.13. Ecuaciones de Lagrange ... 41
1.14. Trayectorias ortogonales ... 43

Capítulo II

Diversas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

2.1. Algunas aplicaciones geométricas. Problemas I a X ... 49
2.2. Problema XI.—Sensibilidad de una balanza ... 59
2.3. Problema XII.—Sensibilidad del termómetro a gas ... 60
2.4. Problema XIII.—Superficie de equilibrio de un líquido en movimiento ... 61
2.5. Problema XIV.—Problema de cinemática ... 62
2.6. Problema XV.—Carga de un condensador a través de una resistencia ... 63

2.7. Problema XVI.—Establecimiento de la corriente en una bobina de inductancia ... 68
2.8. Problema XVII.—Aplicación termodinámica ... 71
2.9. Problema XVIII.—Ley del interés compuesto ... 74
2.10. Problema XIX.—Aumento de la población de un país ... 75
2.11. Problema XX.—Estudio de un cultivo de microbios ... 76
2.12. Problema XXI.—El espejo parabólico ... 77
2.13. Problema XXII.—Trabajo perfecto de un gas detenido ... 80
2.14. Problema XXIII.—Variación de la presión atmosférica con la altitud ... 80
2.15. Problema XXIV.—Movimiento de un proyectil en el aire ... 83
2.16. Problema XXV.—Ley de la caída de los cuerpos ... 84
2.17. Problema XXVI.—Establecimiento de la fórmula fundamental de la corriente alterna ... 88
2.18. Problema XXVII.—Obtención de la ecuación de las curvas adiabáticas de los gases perfectos ... 94

Capítulo III

Ecuaciones diferenciales de segundo orden Ecuaciones incompletas

3.1. Generalidades ... 97
3.2. Primer tipo de ecuaciones incompletas ... 98
3.3. Primera aplicación: obtención de la ley de la caída de los cuerpos 100
3.4. Segunda aplicación, sobre un volante ... 102
3.5. Segundo tipo ... 103
3.6. Primera aplicación: cálculo del período de un circuito oscilante en radio ... 106
3.7. Segunda aplicación: cálculo del período de un péndulo ... 109
3.8. Tercer tipo ... 111
3.9. Cuarto tipo ... 113

Capítulo IV

Ecuaciones diferenciales de segundo orden completas, lineales y con coeficientes constantes

4.1. Ecuaciones sin segundo miembro ... 117
4.2. Primer caso: la ecuación característica tiene dos raíces reales ... 118
4.3. Segundo caso: la ecuación característica tiene una sola raíz ... 119

4.4. Tercer caso: la ecuación característica tiene dos raíces imaginarias 121
4.5. Caso particular: el segundo miembro es una constante 123
4.6. Ecuaciones con segundo miembro variable. Teorema 124
4.7. Búsqueda de soluciones particulares. Primer caso: el segundo miembro es un polinomio en x 125
4.8. Segundo caso: el segundo miembro es una exponencial 128
4.9. Tercer caso: el segundo miembro es el producto de una exponencial por un polinomio en x 132
4.10. Cuarto caso: el segundo miembro es una suma de senos y cosenos 134
4.11. Observaciones varias 137

Capítulo V

Problemas de aplicación de las ecuaciones diferenciales de segundo orden

5.1. Problema I.—Trayectoria de un proyectil 139
5.2. Problema II.—Sobre dinámica 141
5.3. Problema III.—Curva de escape 143
5.4. Problema IV.—Movimiento de un punto atraído o rechazado por un centro fijo, proporcionalmente a la distancia 146
5.5. Generalización. Problema V.—Obtención de la trayectoria de una partícula electrizada 148
5.6. Problema VI.—Sólido girando alrededor de un eje 151
5.7. Problema VII.—Fórmula general para calcular el período de un sistema oscilante 152
5.8. Problema VIII.—Oscilaciones forzadas de un sistema oscilante cualquiera. Resonancia 155
5.9. Problema IX.—Cálculo del período de un resonador acústico (esfera de Helmholtz) 156
5.10. Problema X.—Sobre la gravedad 158
5.11. Problema XI.—Consideración de la resistencia del aire 160
5.12. Problema XII.—Establecimiento de la fórmula fundamental de la resistencia de materiales (flexión de vigas) 166
5.13. Problema XIII.—Cálculo de la flecha de una viga 168
5.14. Problema XIV.—Vibraciones de un árbol de máquina girando a gran velocidad 171
5.15. Problema XV.—Oscilaciones de una columna líquida 173
5.16. Problema XVI.—Barra deslizante en un campo magnético 175
5.17. Problema XVII.—Estudio matemático detallado de la descarga de un condensador eléctrico en una bobina de inductancia 176
5.18. Problema XVIII.—Analogía mecánica 190
5.19. Problema XIX.—Vibraciones forzadas 194

5.20. Problema XX.—Aplicación al cuadro móvil de los apadatos de medida eléctricos ... 197
5.21. Problema XXI.—Acción de una F. E. M. continua sobre un circuito. 198
5.22. Problema XXII.—Calcular el período de un péndulo ascendente. 199
5.23. Problema XXIII.—Propagación del calor en una barra ... 201
5.24. Problema XXIV.—La lámpara oscilatriz de radio. Cálculo del período y de la condición límite de entretenimiento ... 203

Capítulo VI

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

6.1. Sistemas de dos ecuaciones lineales de primer orden ... 211
6.2. Ejemplos ... 212
6.3. Problemas de propagación de la corriente eléctrica a lo largo de una línea (estudio simplificado) ... 213
6.4. Estudio de circuitos oscilantes emparejados ... 219
6.5. Otro ejemplo eléctrico ... 222

Capítulo VII

Ecuaciones diferenciales con derivadas parciales

7.1. Generalidades ... 225
7.2. Primer tipo: $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = 0$ ... 226
7.3. Segundo tipo: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ... 227
7.4. Solución original de D'Alembert ... 229
7.5. Tercer tipo: ecuación de Laplace ... 230
7.6. Otra forma de integrar la ecuación de Laplace ... 230
7.7. Primera aplicación. Establecimiento de la ecuación de las cuerdas vibrantes ... 232
7.8. Segunda aplicación. Propagación de una corriente eléctrica alterna a lo largo de un hilo (estudio pormenorizado) ... 235
7.9. Otra forma de obtener la ecuación de V y de I a lo largo de un hilo 241
7.10. Ejemplo importante. Caso de un hilo religado al suelo. Producción de ondas estacionarias (antenas de radio) ... 243

Capítulo VIII

Introducción al estudio del potencial

8.1. Expresión analítica del trabajo elemental de una fuerza 248
8.2. Campo de fuerzas 248
8.3. Caso en el que el trabajo total solamente depende de las posiciones inicial y final 249
8.4. Función de fuerzas. Potencial 249
8.5. El potencial "newtoniano" 251

Capítulo IX

Introducción al estudio de la distribución de los campos

9.1. Primera ley. Ley relativa al flujo 255
9.2. Aplicación eléctrica. Fórmula de Poisson. Fórmula de Langmuir 258
9.3. Segunda ley. Trabajo de los vectores 260

Lista resumen de las fórmulas del tomo V 263

Ejercicios y problemas para resolver 275

CAPITULO PRIMERO

ECUACIONES DIFERENCIALES

1. 1. Generalidades. — Las ecuaciones diferenciales constituyen uno de los capítulos más importantes de las matemáticas superiores, pues tienen inumerables aplicaciones. Estudiaremos un gran número de ellas convirtiendo cada vez el problema en ecuaciones, para que de esta forma el lector se dé cuenta de que el cálculo diferencial y el integral se presten mutuo y fuerte apoyo.

Una ecuación diferencial es una ecuación que liga una función $y = f(x)$ con una o varias de sus derivadas, y', y'', y''', etc.

El orden de tal ecuación es el de la derivada de orden mayor.

Integrar la ecuación, es obtener todas las funciones y que verifican la ecuación.

Desde el punto de vista geométrico, se pueden mirar x e y como las coordenadas de un punto del plano C. Integrar la ecuación, es obtener todas las curvas en que la ordenada y (función de x) verifica la ecuación diferencial dada. Una cualquiera de estas curvas se llama *curva integral.*

Así, por ejemplo, sea la ecuación diferencial de primer orden

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

se tiene, integrando,

$$\int x\,dx = -\int y\,dy + C$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C = R^2$$

ecuación de una familia de círculos.

Para las de segundo orden se tendrán, evidentemente, dos constantes, ya que en suma, es preciso, en principio, integrar dos veces, y para la de orden n^e se tendrán n constantes.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Tal ecuación se presenta bajo la forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

donde x e y representan las coordenadas de un punto del plano.

Antes de estudiar la resolución de estas ecuaciones, examinemos y demostremos los dos teoremas siguientes, *cuyo estudio, por otra parte, puede dejarse a un lado en una primera lectura,* siendo la cuestión primordial, evidentemente, resolver la ecuación, es decir, obtener la función $y = f(x)$ que satisface la ecuación diferencial.

Para estos dos teoremas, nos basaremos en la demostración de APPELL.

1. 2. Teorema I. — *Supongamos una familia de curvas (en el plano xy) de ecuación.*

$$\varphi(x, y, C) = 0$$

que contiene una constante C, la ordenada y de una de estas curvas verifica una ecuación diferencial de primer orden, independiente de C.

La ecuación de estas curvas, (x, y, C) es la integral general de la ecuación diferencial.

Cuando se da a C diferentes valores estas curvas se desplazan, y por un punto M cualquiera del plano pasan una o varias de estas curvas.

Busquemos la pendiente de la tangente a una de esta curvas, que pase por el punto M, de coordenadas x e y. Esta pendiente $\frac{dy}{dx}$ se obtiene derivando la ecuación φ con respecto a x, y siendo función de x:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'}$$

Si ahora, entre la función y su derivada, se elimina la constante C, se obtiene una ecuación

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

que define $\frac{dy}{dx}$ en función de x y de y. Es la ecuación diferencial de las curvas en cuestión.

Puede interpretarse esta ecuación diciendo que da la inclinación de la tangente a la curva que pasa por el punto M. Esta ecuación puede ser de cualquier grado en y' y da uno o varios valores de y'; por consiguiente hay una o varias curvas que pasan por ese punto.

Ejemplo. — Sea la familia de parábolas

$$y^2 = \mathrm{K}x. \tag{1}$$

Por un punto M cualquiera del plano, pasa una de estas parábolas: basta que K tenga el valor conveniente. Diferenciando se tiene

$$2y\,dy = \mathrm{K}\,dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{K}}{2y} = \frac{\mathrm{C}}{y} \tag{2}$$

que define la tangente en el punto M.

La eliminación de C entre las ecuaciones (1) y (2) da la ecuación diferencial de las parábolas

$$y^2 = \mathrm{K}x = 2y\frac{dy}{dx}\cdot x$$
$$2x\frac{dy}{dx} - y = 0. \tag{3}$$

ecuación que determina así la pendiente de la tangente a la parábola que pasa por M.

Al contrario, partiendo de la ecuación (3) puede llegarse a la ecuación (1). En efecto, separemos las variables, y después integremos

$$2x\,dy = y\,dx$$
$$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$
$$2\,\mathrm{Log}\,y = \mathrm{Log}\,x + \mathrm{Log}\,\mathrm{K}$$
$$\mathrm{Log}\,y^2 = \mathrm{Log}\,\mathrm{K}x$$
$$y^2 = \mathrm{K}x,$$

volviéndose a obtener la ecuación de una familia de parábolas.

1. 3. Teorema II. — *A la inversa, dada una ecuación diferencial de primer orden*

$$\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

existe una familia de curvas en las que la ecuación depende de una constante tal, que la ordenada de una cualquiera de estas curvas, mirada como función de la variable x, verifica la ecuación diferencial dada.

1.° *Demostración geométrica.* — Esta demostración puede, por otra parte, emplearse para integrar gráficamente una ecuación diferencial.

La ecuación $F(x, y, y')$ puede ser de un grado cualquiera en y' Consideremos que uno de estos valores de y', será, en el caso más general, una función de x e y

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Puede llegarse, por otra parte, a que este valor no sea real en ciertas regiones del plano.

Demostremos que por cada punto M_0, de coordenadas x_0 e y_0, situado en esta región, pasa una curva integral. Por ello, insistimos en que y' es la pendiente de la tangente en un punto de la curva.

Es preciso, en resumen, trazar una curva de la que se conoce la pendiente de cada punto. En el punto M_0 será (fig. 1)

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

Sobre esta tangente desplacémonos Δl, que da un punto M_1 de coordenadas x_1 e y_1 y en este punto

$$y'_1 = f(x_1, y_1), \qquad \text{etc.}$$

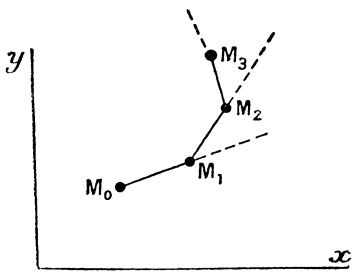


FIG. 1

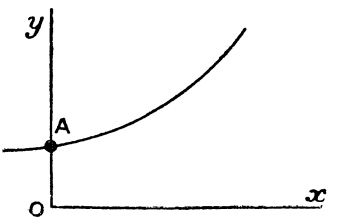


FIG. 2

Continuando así punto a punto, se obtienen los M_2, M_3, etc., y si Δl tiende a cero, la línea poligonal tiende a una curva continua.

Falta por ver que la ecuación general de estas curvas depende de una constante C cualquiera.

Supongamos (fig. 2) que las curvas cortan al eje de las y. Tome-

mos un punto *cualquiera* A, de ordenada y_A: por este punto pasa una curva. Ahora bien, esta curva cambia de forma y de posición si A varía, por consiguiente la ecuación de esta curva contiene y_A, que es una constante arbitraria, a la cual antes hemos denominado C.

2.° *Demostración analítica.* — Puede emplearse el método, tan cómodo, de los coeficientes indeterminados, y tratar de verificar la ecuación diferencial con la ayuda de una serie del tipo

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

e identificando, se obtiene una serie de fórmulas que permiten calcular a_0, a_1, a_2 ...

Ejemplo. — Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

Se pide calcular y.

Pongamos

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^3 + \ldots$$
$$= x^2 + y^2$$

es decir

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots \equiv x^2 + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)^2.$$

Identificando las potencias análogas de x, se deduce

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0^2 \\ 2a_2 &= 2a_1a_0 \\ 3a_3 &= 1 + a_1^2 + 2a_2a_0 \qquad \text{etc.} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$a_1 = a_0^2, \qquad a_2 = a_0^3, \qquad a_3 = \frac{1}{3}(1 + 3a_0^4), \qquad \text{etc.}$$

y, finalmente

$$y = a_0 + a_0^2x + a_0^3x^2 + \frac{(1+3a_0^4)}{3}x^3 + \ldots$$

que es la integral general y que contiene una sola constante a_0.

1. 4. Clasificación y resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden. — No hay un método general para resolverlas, todo depende del tipo de ecuación; por ello antes de empezar los cálculos, se precisa siempre ver de qué tipo es la ecuación dada.

Hay, primeramente, tres grandes tipos principales de ecuaciones de primer orden:

1.° *Ecuaciones en las que pueden separarse las variables*;

2.° *Ecuaciones homogéneas* (en las que todos los términos son del mismo grado);

3.° *Ecuaciones lineales* (en las que y e y' son de primer grado).

Estas últimas pueden tener coeficientes constantes o variables, sin segundo o con segundo miembro (constante o función de x). Por otra parte, estas ecuaciones lineales tienen, generalmente, gran utilidad, pues se encuentran constantemente en Física, Mecánica, Termodinámica, Electricidad, etc. Daremos un gran número de ejemplos y aplicaciones.

Todas estas ecuaciones pueden expresarse bajo la forma $Mdx + Ndy = 0$, donde M y N son funciones de x y de y.

Fuera de estos tipos generales de ecuaciones de primer orden, existe cierto número de tipos especiales: ecuaciones de BERNOULLI, de RICCATTI, de CLAIRAUT, de LAGRANGE, etc. Naturalmente no podemos estudiarlas todas en este *Curso elemental de Matemáticas Superiores*. Nos limitaremos, a título de ejercicio, a las ecuaciones de BERNOULLI, de CLAIRAUT y de LAGRANGE.

Estudiemos ahora la resolución de los tres tipos principales de ecuaciones diferenciales de primer orden.

1. 5. Primer tipo: Ecuaciones en las que pueden separarse las variables. —Se pasan a un miembro todos los términos en x, y al otro todos los en y, separados por el signo «igual» y se llega a una expresión de la forma

$$f(x)dx = \varphi(y)dy$$

en donde la expresión $f(x)$ es función de x solamente, y $\varphi(y)$ es función tan sólo de y.

Después se integra, sin olvidar la constante C.

Finalmente, se trata de dar la solución bajo la forma explícita $y = f(x)$, manteniendo la expresión de la constante C.

Ejemplos:

1.° *Sea la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1-y}{1+x} = 0.$$

— Separemos las variables

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{1+x}$$

$$\frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{1+x}.$$

Integremos

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{dx}{1+x} + \text{Log C}$$

$$-\text{Log}\,(1-y) = \text{Log}\,(1+x) + \text{Log C} = \text{Log C}(1+x)$$

$$\frac{1}{1-y} = \text{C}(1+x)$$

$$1-y = \frac{1}{\text{C}(1+x)}$$

$$y = 1 - \frac{1}{\text{C}(1+x)} = 1 - \frac{\text{K}}{1+x}$$

$$= \frac{1+x-\text{K}}{1+x} = \frac{x+\text{K}'}{x+1}.$$

2.° *Sea la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0.$$

— Separemos las variables

$$\frac{dy}{dx} = -y\cos x$$

$$\frac{dy}{y} = -\cos x\,dx.$$

Integremos

$$\text{Log } y = -\int \cos x \, dx + \text{Log C} = -\text{sen } x + \text{Log C}$$

$$\text{Log } \frac{y}{C} = -\text{sen } x$$

$$y = Ce^{-\text{sen } x}.$$

1. 6. Segundo tipo: Ecuaciones homogéneas. — Una ecuación diferencial

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y) = 0$$

o bien

$$M \cdot dx + N \cdot dy = 0$$

en la que M y N son funciones de x y de y, se llama homogénea cuando los términos son del mismo grado, o bien cuando puede ponerse de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

tal ecuación homogénea no cambia cuando se sustituye x por Kx e y por Ky.

Así, son homogéneas las ecuaciones siguientes:

$$y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx.$$

En efecto, en la primera todos los términos son de segundo grado (ya que el producto xy es de segundo grado); en la segunda todos los términos son de primer grado, ya que $\sqrt{x^2 + y^2}$ es una expresión de primer grado.

Se observa inmediatamente que todas estas ecuaciones no cambian si se sustituye x por Kx e y por Ky.

Resolución:

$$\text{se pone } \frac{y}{x} = u \qquad \text{o} \qquad y = ux$$

donde u es una función desconocida de x. Se obtiene

$$dy = x\,du + u\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u,$$

que se sustituye en la ecuación diferencial, y se simplifica (en efecto, debe poder simplificarse siempre). Se obtiene entonces una ecuación en la que pueden separarse las variables

$$x = \frac{du}{dx} + u = f(u)$$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \text{Log } x + \text{Log } C,$$

obteniéndose el valor de u, de donde $y = ux$.

Ejemplos:

1.° *Sea la ecuación*

$$(x^2 + y^2)dx - xy\,dy = 0,$$

homogénea, ya que todos los términos son de segundo grado, en x, y, o xy.

— Pongamos

$$y = u \cdot x \qquad \text{de donde} \qquad dy = x \cdot du + u \cdot dx,$$

sustituyendo en la ecuación, lo que da

$$(x^2 + u^2x^2)dx - x \cdot ux(x\,du + u\,dx) = 0,$$

dividimos por x^2

$$(1 + u^2)dx - u(x\,du + u\,dx) = 0,$$

simplificamos, convirtiéndose en

$$dx - ux\,du = 0,$$

separamos las variables

$$\frac{dx}{x} = u\,du.$$

Integramos

$$\text{Log } x = \frac{u^2}{2} + \text{Log C} = \frac{y^2}{2x^2} + \text{Log C}$$

$$\frac{y^2}{2x^2} = \text{Log } \frac{x}{C}$$

$$y = x\sqrt{2 \text{ Log } \frac{x}{C}}.$$

2.º *Sea la ecuación a integrar*

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx.$$

— Es una ecuación homogénea, siendo todos los términos de primer grado.

— Pongamos

$$y = u \cdot x \qquad \text{de donde} \qquad dy = x\,du + u\,dx,$$

La ecuación se convierte en

$$x(x\,du + u\,dx) - ux\,dx = \sqrt{x^2 + u^2x^2}\,dx$$

o, dividiendo por x

$$x\,du + u\,dx - u\,dx = \sqrt{1 + u^2}\,dx$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}$$

o, integrando

$$\text{Log}\,(u + \sqrt{1 + u^2}) = \text{Log}\,x + \text{Log}\,C = \text{Log}\,Cx,$$

$$u + \sqrt{1 + u^2} = Cx$$

$$\sqrt{1 + u^2} = Cx - u,$$

elevando al cuadrado

$$1 + u^2 = C^2x^2 + u^2 - 2Cx\,u$$

$$1 = C^2x^2 - 2Cx\,u$$

$$u = \frac{C^2x^2 - 1}{2Cx} = \frac{y}{x}$$

e

$$y = \frac{C^2x^2 - 1}{2C} = Kx^2 + K'$$

es, por consiguiente, una familia de parábolas.

1. 7. Tercer tipo: Ecuaciones lineales. — Estas ecuaciones son, con mucho, las más interesantes, ya que se encuentran constantemente en Física, Electricidad, Mecánica, etc.

Son ecuaciones en las que y' e y son de primer grado.

En el caso más general, se presentan bajo la forma siguiente, teniendo un término en y' y otro en y:

$$\boxed{A\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = \varphi(x)}$$

el término suplementario $\varphi(x)$ se llama segundo miembro, y es solamente función de x. Pero también puede ser que una de las dos funciones $f(x)$ o $\varphi(x)$, o incluso las dos a la vez, sean constantes. Puede ocurrir también que $\varphi(x)$, *o incluso las dos a la vez, sean constantes.* Puede ocurrir también que $\varphi(x)$ sea nula, diciéndose entonces que la ecuación carece de segundo miembro. Por consiguiente pueden darse los casos siguientes:

$$A\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = \varphi(x)$$

$$A\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = 0 \text{ ó } C$$

$$A\frac{dy}{dx} + By = \varphi(x)$$

$$A\frac{dy}{dx} By = 0 \text{ ó } C.$$

Para integrarlas, todo depende de si la ecuación no tiene segundo miembro o si es función de x. Se dan, por consiguiente, dos casos.

Cuando el segundo miembro es constante, se reduce a una ecuación sin segundo miembro.

1. 8. Primer caso. Ecuación lineal sin segundo miembro.

Primer tipo: $\boxed{A\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = 0}$

Segundo tipo: $\boxed{A\frac{dy}{dx} + By = 0}$

La resolución es muy sencilla, ya que se reduce al primer tipo de ecuación de primer orden: *se puede, en efecto, separar las variables,* y la integración es inmediata.

Ejemplos:

1.° *Sea la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{1+x} = 0.$$

— Separemos las variables

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{1+x}.$$

Integremos

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{1+x} + \operatorname{Log} C$$

$$\operatorname{Log} y = 2\operatorname{Log}(1+x) + \operatorname{Log} C = \operatorname{Log} C(1+x)^2.$$

Por consiguiente

$$y = C(1+x)^2$$

que es una familia de parábolas.

2.° *Sea la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$

— Separemos las variables, e integremos.

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx$$

$$\operatorname{Log} y = -x^2 + \operatorname{Log} C$$

$$y = Ce^{-x^2}.$$

Nota. — Veremos después las aplicaciones en electricidad de este tipo de ecuación.

1. 9. Importante caso particular: Ecuación lineal con coeficientes y segundo miembro constante.

$$A\frac{dy}{dx} + By = D.$$

Hay dos métodos para resolver tal ecuación.

Primer método. — Se pueden separar las variables

$$A\frac{dy}{dx} = D - By$$

$$\frac{dy}{D - By} = \frac{dx}{A},$$

integremos

$$\int\frac{dy}{D - By} = \frac{1}{A}x + \text{Log } C$$

$$-\frac{1}{B}\text{Log } (D - By) = \frac{x}{A} + \text{Log } C \qquad \text{etc.}$$

se obtiene finalmente y.

Ejemplo. — *Sea la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} - 4y = 2.$$

— Se puede escribir sucesivamente

$$\frac{dy}{dx} = 2 + 4y$$

$$\frac{dy}{2 + 4y} = dx$$

$$\int\frac{dy}{2 + 4y} = x + \text{Log } C$$

$$\frac{1}{4}\text{Log } (2 + 4y) = x + \text{Log } C$$

$$\text{Log } (2 + 4y) = 4x + \text{Log } C = 4x + \text{Log } K$$

$$\text{Log}\left(\frac{2 + 4y}{K}\right) = 4x$$

$$\frac{2 + 4y}{K} = e^{4x}$$

$$y = K'e^{4x} - \frac{1}{2}.$$

Veremos después un ejemplo en electricidad de este tipo de ecuación.

Segundo método. — Sea pues la ecuación

$$A\frac{dy}{dx} + By = D.$$

— Puede escribirse

$$A\frac{dy}{dx} + (By - D) = 0.$$

Hagamos ahora un cambio de variable poniendo

$$By - D = u, \qquad \text{de donde} \qquad du = B\,dy.$$

La ecuación se convierte entonces

$$\frac{A}{B}\frac{du}{dx} + u = 0,$$

y se ha reducido a una ecuación sin segundo miembro en la que fácilmente pueden separarse las variables.

Ejemplo. — Volvamos al ejemplo anterior.

$$\frac{dy}{dx} - 4y = 2.$$

— Se escribirá

$$\frac{dy}{dx} - (4y + 2) = 0$$

y pondremos

$$4y + 2 = u \qquad \text{de donde} \qquad du = 4\,dy$$

la ecuación se convierte en

$$\frac{1}{4}\frac{du}{dx} - u = 0$$

$$\frac{du}{u} = 4dx.$$

Integremos

$$\operatorname{Log} u = 4x + \operatorname{Log} C$$

$$\operatorname{Log}\frac{u}{C} = 4x$$

$$u = Ce^{4x} = 4y + 2$$

$$y = \frac{Ce^{4x} - 2}{4} = K'e^{4x} - \frac{1}{2}$$

resultado idéntico al anterior.

Nota. — Naturalmente estos dos métodos no podrían aplicarse si A y B, en lugar de ser constantes, fuesen funciones de x:

$$f(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x) \cdot y = D,$$

en este caso sería necesario aplicar el procedimiento siguiente, el mismo que para las ecuaciones con segundo miembro variable.

1. 10. Segundo caso. Ecuaciones lineales con segundo miembro variable.

$$\boxed{A\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = \varphi(x)}$$

se trata, evidentemente, de un segundo miembro que es función de x solamente, pero no de y. El coeficiente de y puede ser, o una constante B, o bien una función de x.

— Se utiliza el método de LAGRANGE, *o método de variación de constantes.* Esta denominación puede parecer rara, pero el lector comprenderá su significación inmediatamente. Se admitirá, por otra parte, la idea ingeniosa de LAGRANGE.

Se resuelve en primer lugar la ecuación sin segundo miembro

$$A\frac{dy}{dx} + f(x) \cdot y = 0,$$

lo que permite separar las variables e integrar inmediatamente

$$A\frac{dy}{dx} = -y \cdot f(x)$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{A} \cdot f(x)dx = K \cdot f(x)dx$$

de donde, integrando

$$\operatorname{Log} y = K\int f(x)dx + \operatorname{Log} C = K \cdot F(x) + \operatorname{Log} C$$

$$\operatorname{Log}\frac{y}{C} = K \cdot F(x)$$

$$y = Ce^{K \cdot F(x)}.$$

Se ve ahora y, como solución de la ecuación completa con segundo miembro, a condición de considerar C no como constante, sino como una función desconocida de x, y esto es lícito siempre.

Por consiguiente, va a diferenciarse y, (que es un producto), después se lleva a la ecuación diferencial, se simplifica, se aisla dC, e, integrando, se obtiene C. Sustituyendo este valor de C en y, se obtiene la solución de la ecuación completa.

Un ejemplo sencillo hará comprender bien el mecanismo del cálculo. Presentaremos a continuación, un ejemplo muy interesante en electricidad.

Ejemplos:

Primer ejemplo. — *Sea la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

— 1.° Resolvemos en primer término la ecuación sin segundo miembro

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Integremos

$$\text{Log}\, y = \text{Log}\, x + \text{Log}\, C = \text{Log}\, Cx$$

de donde

$$y = Cx.$$

— 2.° Consideremos ahora C como una función desconocida de x, y diferenciemos y

$$dy = x\, dC + C\, dx,$$

sustituimos en la ecuación completa, que resulta, sustituyendo también y por su valor

$$\left(x\frac{dC}{dx} + C\right) - \frac{Cx}{x} = x^2$$

se ve que hay dos términos que desaparecen (*y debe ser así siempre según el método, si no hay error de cálculo*). Queda

$$x = \frac{dC}{dx} = x^2$$

$$dC = x\, dx.$$

Integremos

$$C = \frac{x^2}{2} + K \qquad (1)$$

Sustituyamos ahora en y

$$y = Cx = \left(\frac{x^2}{2} + K\right) x$$

$$y = \frac{x^2}{2} + Kx.$$

El lector puede comprobar, diferenciando, y calculando la suma $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}$ que resulta correctamente x^2

Se ve el error en que se incurriría si se olvida la constante de integración K en la ecuación (1).

Segundo ejemplo.— Sea la ecuación

$$\frac{ds}{dt}\cos t + s \cdot \operatorname{sen} t = 1.$$

— Es, en efecto, una ecuación de primer orden, lineal, con coeficientes variables y segundo miembro.

1.° Resolvemos primeramente la ecuación sin segundo miembro

$$\frac{ds}{dt}\cos t + s \cdot \operatorname{sen} t = 0$$

y

$$\frac{ds}{s} = -\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\,dt$$

Integremos

$$\int \frac{ds}{s} = \int \frac{-\operatorname{sen} t\, dt}{\cos t} + \operatorname{Log} C$$

$$\operatorname{Log} s = \operatorname{Log} \cos t + \operatorname{Log} C = \operatorname{Log} (C \cdot \cos t)$$

$$s = C \cdot \cos t.$$

2.° Consideremos ahora C como una función desconocida de t, y diferenciemos

$$ds = \cos t \cdot dC + C(-\operatorname{sen} t)dt.$$

Sustituyamos en la ecuación completa, y remplazando s por su valor

$$\left(\cos t \cdot \frac{dC}{dt} - C \operatorname{sen} t\right) \cos t + C \cos t \cdot \operatorname{sen} t = 1$$

o

$$\cos^2 t \cdot \frac{dC}{dt} = 1$$

$$dC = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

de donde integrando

$$C = \operatorname{tg} t + K.$$

Sustituyamos en s

$$s = C \cdot \cos t = (\operatorname{tg} t + K) \cos t$$
$$= \operatorname{sen} t + K \cos t.$$

Nota. — En todas las aplicaciones prácticas, la constante de integración se determina en cada caso particular por las condiciones iniciales o finales, lo que veremos después en los ejemplos de aplicación.

TIPOS ESPECIALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Hay cierto número de ellas: ecuaciones de BERNOULLI, RICCATTI, CLAIRAUT, LAGRANGE, et., pero como todas no podemos examinarlas aquí con detalle, solamente estudiaremos las ecuaciones de BERNOULLI, CLAIRAUT y LAGRANGE.

1. 11. Ecuaciones de Bernoulli. — Son del tipo

$$\boxed{A\frac{dy}{dx} + My = P \cdot y^n}$$

donde M y P pueden ser constantes, funciones de x (no de y), y n puede tener un valor cualquiera.

Se puede, por sustitución, reducirse a una ecuación lineal.

— Tomemos el caso general en el que M y P son funciones de x:

$$A\frac{dy}{dx} + f(x)y = \varphi(x)y^n$$

Dividamos por y''

$$\frac{A}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{f(x)}{y^{n-1}} = \varphi(x),$$

y ponemos

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$$

diferenciamos

$$dz = (1-n)y^{-n}\,dy = \frac{1-n}{y^n}\,dy$$

de donde

$$\frac{1}{y^n}\,dy = \frac{dz}{1-n}.$$

Sustituimos en la ecuación inicial, que se convierte en

$$\frac{A}{1-n}\frac{dz}{dx} + f(x)\cdot z = \varphi(x),$$

reduciéndose así a una ecuación lineal, con segundo miembro variable, la cual se resolverá por el método de variación de constantes, o separando las variables.

Ejemplos:

1.° *Sea la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 4y^3.$$

—Puede escribirse

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{y^3} = 4.$$

Pongamos

$$z = \frac{2}{y^2} = 2y^{-2} \qquad \text{de donde} \qquad dz = -4y^{-3}\,dy,$$

se obtiene

$$\frac{1}{y^3}\,dy = -\frac{1}{4}\,dz$$

La ecuación inicial se convierte en

$$-\frac{1}{4}\frac{dz}{dx}+z=4$$

$$\frac{dz}{dx}-4z=-16.$$

Separemos las variables

$$\frac{dz}{dx}=4z-16$$

$$\frac{dz}{4z-16}=dx,$$

integremos

$$\int\frac{dz}{4z-16}=x+\text{Log C}'$$

$$\frac{1}{4}\text{Log}\,(4z-16)=x+\text{Log C}'$$

$$\text{Log}\,(4z-16)=4x+4\,\text{Log C}'=4x+\text{Log C}$$

$$\text{Log}\left(\frac{4z-16}{\text{C}}\right)=4x$$

$$\frac{4z-16}{\text{C}}=e^{4x}$$

$$z=4+\text{K}e^{4x}=\frac{2}{y^2},$$

lo que da finalmente

$$y=\frac{1}{\sqrt{2+\text{K}'e^{4x}}}$$

Segundo ejemplo. — *Sea la ecuación*

$$x\frac{dy}{dx}+y=y^2\cdot\text{Log}\,x$$

— Se tendrá

$$\frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}=\text{Log}\,x.$$

Pongamos

$$z = \frac{1}{y} \qquad \text{de donde} \qquad dz = -\frac{1}{y^2}\,dy.$$

La ecuación se convierte en

$$-x\frac{dz}{dx} + z = \operatorname{Log} x$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -\frac{\operatorname{Log} x}{x},$$

Ecuación lineal con segundo miembro variable.

Integremos la ecuación sin segundo miembro

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = 0$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$$

integremos

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} C = \operatorname{Log} Cx$$
$$z = Cx.$$

Diferenciemos este producto, en el que C ahora se considera como una función de x

$$dz = x\,dC + C\,dx,$$

sustituimos en la ecuación (1), lo que resulta

$$\left(x\frac{dC}{dx} + C\right) - \frac{Cx}{x} = -\frac{\operatorname{Log} x}{x}$$

$$x\frac{dC}{dx} = -\frac{\operatorname{Log} x}{x}$$

$$dC = -\frac{\operatorname{Log} x}{x^2}\,dx$$

$$C = -\int \underbrace{\operatorname{Log} x}_{u}\,\underbrace{\frac{dx}{x^2}}_{dv} + K$$

de donde

$$C = -\left[\operatorname{Log} x\left(-\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x}\right] + K$$

$$= \frac{1}{x}\operatorname{Log} x + \frac{1}{x} + K.$$

Se tiene también

$$z = Cx = x\left(\frac{1}{x}Lx + \frac{1}{x} + K\right)$$

$$= \operatorname{Log} x + 1 + Kx = \frac{1}{y}$$

e

$$y = \frac{1}{\operatorname{Log} x + Kx + 1}.$$

Nota. — Generalmente también puede utilizarse desde el principio el método de variación de las constantes.

Ejemplo — Obtener la ecuación de la curva que la ordenada OT *de la tangente a la misma* (fig. 3), *sea media proporcional entre la ordenada y el punto* P *de la curva y una longitud cualquiera a, constante.*

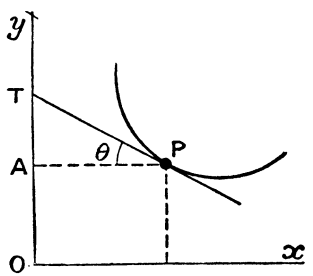


FIG. 3

Sea, por consiguiente,

$$OT^2 = y \cdot a$$

o

$$(y + AT)^2 = ay$$

$$\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = ay \qquad (1)$$

$$y - x\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{ay},$$

que es una ecuación de BERNOULLI.

Resolvamos la ecuación sin segundo miembro

$$y - x\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{Log} y = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} C \quad \text{de donde} \quad y = Cx \qquad (2)$$

Consideremos ahora C como una función de x, derivemos y sustituyamos en la ecuación (1)

$$Cx - x\left(C + x\frac{dC}{dx}\right) = \pm\sqrt{aCx}$$

$$-x^2\frac{dC}{dx} = \pm\sqrt{aCx}$$

$$\frac{dC}{\sqrt{C}} = \pm\sqrt{a}x^{-3/2}\,dx,$$

integremos

$$2\sqrt{C} = \mp\sqrt{a}x^{-1/2}(-2) + C'$$

$$\sqrt{C} = \pm\sqrt{\frac{a}{x}} + K.$$

Sustituyamos y en la ecuación (2), y calculando la raíz cuadrada

$$\sqrt{y} = \sqrt{C}x = \sqrt{x}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{x}} + K\right) = \pm\sqrt{a} + K\sqrt{x}$$

$$y = a + K^2x \pm 2K\sqrt{ax}$$

$$(y - a - K^2x)^2 = 4K^2ax$$

que es la ecuación buscada. Veremos en Geometría Analítica Plana (Tomo VI de esta serie), que es la ecuación de una cónica, y como los términos de segundo grado proceden del paréntesis, que es un cuadrado perfecto, se obtiene una parábola, que, por otra parte, es tangente a los dos ejes Ox y Oy.

1.12. Ecuación de Clairaut. — Es una ecuación del tipo

$$\boxed{y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)} \qquad (1)$$

de primer grado en x e y

— Para integrarla, es decir, para obtener la función

$$y = F(x)$$

empecemos por derivar la ecuación (1), resultando

$$y' = \left(\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2}\right) + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$$

y, simplificando por y'

$$0 = x\frac{d^2y}{dx^2} + f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}. \qquad (2)$$

Pongamos

$$\frac{dy}{dx} = p \qquad \text{de donde} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

la ecuación (2) se convierte en

$$0 = \frac{dp}{dx}[x + f'(p)].$$

Hay por consiguiente dos soluciones:

1.° $$\frac{dp}{dx} = 0 \qquad \text{o} \qquad p = C$$

y la ecuación (1) se convierte en

$$y = Cx + f(C)$$

que representa una familia de rectas.

2.° $$x + f'(p) = 0$$

de donde

$$x = \varphi(p),$$

y la ecuación (1) dará y en función de p.

Se expresan de esta forma las coordenadas x e y de un punto de la curva en función de un parámetro p que es

$$p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Esta curva no tiene constante, es una integral particular y envolvente de rectas (Véase el Tomo VI: Geometría Analítica) que forma la integral general. Falta entonces, como lo expondremos en el Tomo VI en la «Teoría de las Envolventes», eliminar C entre la ecuación de las rectas y su derivada con respecto a C.

Ejemplo. — *Sea la ecuación de* CLAIRAUT.

$$y = xy' - y'^3. \qquad (1)$$

Pongamos

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

lo que resulta

$$y = px - p^3.$$

Diferenciemos

$$dy = x\,dp + p\,dx - 3p^2dp$$

y como $dy = p\,dx$, queda

$$0 = x\,dp - 3p^2dp$$
$$dp(x - 3p^2) = 0$$

que tiene dos soluciones:

1.° $\qquad dp = 0 \quad$ o $\quad p = C$

y la ecuación se convierte en

$$y = Cx - C^3 \qquad \text{(familia de rectas)}$$

2.°

$$x - 3p^2 = 0 \quad \text{o} \quad p = \sqrt{\frac{x}{3}}$$

sustituyendo en la ecuación (1):

$$y = x\sqrt{\frac{x}{3}} - \frac{x}{3}\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{2x}{3}\sqrt{\frac{x}{3}}.$$

1. 13. Ecuación de Lagrange. — Es una generalización de la ecuación de CLAIRAUT, pero aquí el coeficiente de x *es una función cualquiera de* y', en lugar de ser y' misma.

La ecuación de LAGRANGE es de la forma

$$y + x \cdot f(y') + \varphi(y') = 0, \qquad (1)$$

que no es forzosamente lineal.

— Para la resolución se pone $y' = p$.

Derivemos la ecuación (1)

$$p + [f(p) + x \cdot f'(p) \cdot p_x'] + \varphi'(p) \cdot p_x' = 0,$$

observando que $f'(p)$ y $\varphi'(p)$ solamente contienen p.

Puede escribirse

$$p + f(p) + p_x'[x \cdot f'(p) + \varphi'(p)] = 0$$

que puede integrarse tomando x como función y p como variable (y, en efecto, ha desaparecido).

Hagamos aparecer la derivada de x con respecto a p, ya que

$$p_x' = \frac{1}{x_p'},$$

lo que da

$$p + f(p) + \frac{1}{x_p'}[x \cdot f'(p) + \varphi'(p)] = 0$$

$$x_p'[p + f(p)] + x \cdot f'(p) + \varphi'(p) = 0,$$

ecuación de la forma

$$Ax_p' + Bx + C = 0$$

donde A, B y C son funciones de p.

Integrando se tendrá $x = F(p)$, y como

$$dy = p \cdot dx = p \cdot F'(p)dp$$

se tendrá finalmente

$$y = \int p \cdot F'(p)dp.$$

Ejemplo — *Sea la ecuación*

$$x\frac{dy}{dx} + y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

— Pongamos

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

la ecuación se convierte en

$$px + y = p^3. \qquad (1)$$

Diferenciemos

$$p\,dx + dp + dy = 3p^2\,dp$$

$$p + x\frac{dp}{dx} + \frac{dy}{dx} = 3p^2\frac{dp}{dx}$$

$$2p + x\frac{dp}{dx} = 3p^2\frac{dp}{dx}$$

$$2p\frac{dx}{dp} + x = 3p^3$$

ecuación diferencial lineal con segundo miembro, que da x en función de p. Se obtiene fácilmente

$$x = Kp^{-1/2} + \frac{3}{5}p^2 \tag{2}$$

Se obtendrá finalmente y por medio de la ecuación (1):

$$y + px = p^3,$$

que da

$$y = -Kp^{1/2} + \frac{2}{5}p^3. \tag{3}$$

Eliminando p entre las ecuaciones (2) y (3), se obtendrá la ecuación buscada

1. 14. Trayectorias ortogonales.

Definición. — Sea $f(x, y, a) = 0$ la ecuación de una familia de curvas que dependen de un parámetro a; se llaman *trayectorias ortogonales* otra familia de curvas que cortan a las primeras en ángulo recto.

Calculemos la diferencial dy

$$dy = -\frac{f_x'}{f_y'}dx, \tag{1}$$

y si se elimina el parámetro a entre estas dos ecuaciones se tendrá la ecuación diferencial de las curvas que definen sus tangentes, ecuación que se presentará bajo la forma

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0$$

o

$$Mdx + Ndy = 0. \tag{2}$$

Las trayectorias ortogonales cortarán a las primeras curvas en ángulo recto, pues en cada punto de encuentro las dos curvas tienen las mismas abcisa y ordenada, pero la pendiente de su tangente será inversa y de signo contrario, es decir $-\frac{dx}{dy}$. Basta cambiar dx por dy y dy por $-dx$ en la ecuación (2), resultando

$$Mdy - Ndx = 0$$

que es la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales.

Ejemplos.

1.° Empecemos por un ejemplo sencillo: *obtener las trayectorias ortogonales de una serie de círculos concéntricos, es decir, con el mismo centro, pero de radio variable.*

— Sea

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

la ecuación de los círculos. Diferenciemos, lo que elimina el parámetro R

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Las trayectorias ortogonales son, por consiguiente,

$$x\,dy - y\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

de donde, integrando

$$y = Cx$$

que representa una familia de rectas que pasan por el origen, y son los radios de los círculos, lo cual era evidente, ya que todos los radios son normales a las diferentes circunferencias.

2.° *Obtener las trayectorias ortogonales de las parábolas* $y^2 = 2px$

— La ecuación de la familia de curvas es

$$y^2 - 2px = 0 = f(x, y, p). \qquad (1)$$

Diferenciemos

$$2y\,dy - 2p\,dx = 0,$$

de donde

$$p = y\frac{dy}{dx},$$

sustituyamos en la ecuación (1), y nos dará

$$y^2 - 2y\frac{dy}{dx}x = 0$$

$$y\,dx - 2x\,dy = 0.$$

Cambiemos dx por dy y dy por $-dx$, y tendremos la ecuación de las trayectorias ortogonales

$$y\,dy + 2x\,dx = 0.$$

Integrando, se obtiene

$$\frac{y^2}{2} + x^2 = C$$

que es una familia de elipses.

3.° *Buscar la ecuación de las trayectorias ortogonales a circunferencias de radio constante* R, *y de las que el centro se desplaza sobre el eje de las x* (fig. 4).

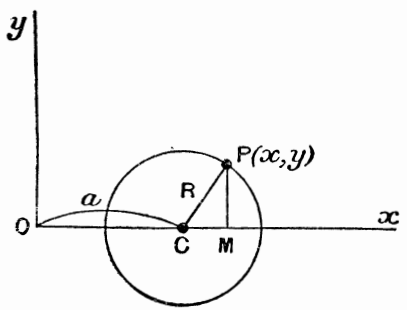


FIG. 4

—Llamemos a, a la distancia del centro al origen O.

La ecuación de los círculos viene dada por el triángulo CPM, donde P es un punto cualquiera de la circunferencia.

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2. \tag{1}$$

Diferenciemos

$$(x - a)dx + y\,dy = 0. \tag{2}$$

Eliminemos a; la segunda ecuación da

$$x - a = -y\frac{dy}{dx},$$

sustituyamos en la primera, lo que da sucesivamente

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = R^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$y\,dy \mp \sqrt{R^2 - y^2}\,dx = 0 \qquad (3)$$

que expresa la propiedad de todas las tangentes a estas circunferencias.

Las trayectorias ortogonales se definen, por consiguiente, por

$$y\,dx \pm \sqrt{R^2 - y^2}\,dy = 0. \qquad (4)$$

Integrando, se tendrá la ecuación de estas trayectorias.

Hagamos $y = R \operatorname{sen} \varphi$, de donde

$$dy = R \cos \varphi\, d\varphi \qquad \text{y} \qquad \sqrt{R^2 - y^2} = R \cos \varphi.$$

La ecuación (4) se convierte en

$$R \operatorname{sen} \varphi\, dx \pm R \cos \varphi \cdot R \cos \varphi\, d\varphi = 0$$

$$dx = \mp R \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = \mp R \frac{(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) d\varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$$

$$x = \mp R \left[\int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} - \int \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi\right]$$

$$= \mp R \left[\operatorname{Log} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi\right] + C.$$

Ahora bien

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R}$$

y

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}} = \sqrt{\frac{R - \sqrt{R^2 - y^2}}{R + \sqrt{R^2 - y^2}}}$$

y se tendrá

$$x = \pm \sqrt{R}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{R - \sqrt{R^2 - y^2}}{R + \sqrt{R^2 - y^2}} + \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R}\right) + C$$

que es la ecuación buscada. Esta curva tiene dos puntos de cambio

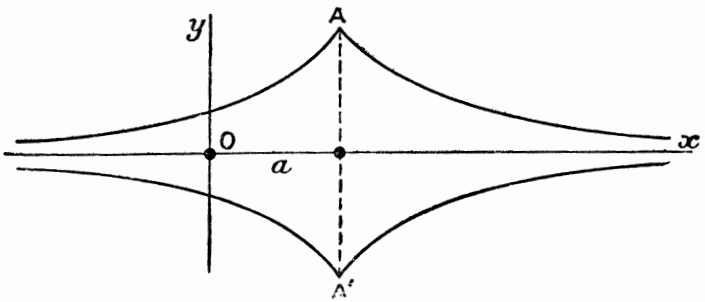


FIG. 5

en A y A', y cuatro ramas asintóticas al eje de las x; esta curva se llama tractriz (fig. 5).

CAPITULO II

DIVERSAS APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

2. 1. Algunas aplicaciones geométricas.

Problema I. — *Obtener la curva de la cual la longitud de la normal es constante.*

— Veremos en el tomo VI que la longitud de la normal a una curva (o perpendicular a la tangente en un punto de la curva) es $y\sqrt{1+y'^2}$. Se tendrá, por consiguiente:

$$y\sqrt{1+y'^2} = C.$$

Puede despejarse y':

$$y^2(1+y'^2) = C^2,$$

de donde:

$$y' = \frac{\sqrt{C^2-y^2}}{y}.$$

Se tendrá, por consiguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{C^2-y^2}}{y},$$

o, separando las variables:

$$-\frac{y\,dy}{\sqrt{C^2-y^2}} = dx.$$

Integrando, se obtiene:

$$-\sqrt{C^2-y^2} = x + K$$

o bien

$$y^2 + (x + K)^2 = C^2$$

que es la ecuación de un círculo de radio igual a C y del cual el centro está sobre el eje de las x, lo que era evidente «a priori».

Problema II. — *Obtener la curva de la cual la subnormal es constante.*

— La subnormal que tiene por longitud yy' (Véase el Tomo VI, es:

$$yy' = a$$

o

$$y\,dy = a\,dx.$$

Estando separadas las variables, integremos:

$$\frac{y^2}{2} = ax + C$$

o

$$y^2 = 2ax + 2C$$

que es la ecuación de una parábola de la cual el eje es el eje de las x.

Problema III. — *Obtener la curva de la cual la subtangente es proporcional a la abscisa.*

— La longitud de la subtangente (Véase el Tomo VI), siendo $\frac{y}{y'}$, se tiene:

$$\frac{y}{y'} = ax,$$

de donde, separando variables:

$$a\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Integremos:

$$a \operatorname{Log} y = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} C$$
$$= \operatorname{Log} Cx$$

o

$$y^a = Cx,$$

es, por consiguiente, una parábola de grado a.

Si $a = 2$, se tiene una parábola normal.

Problema IV. — *Obtener la curva de la cual la longitud de la tangente es constante.*

— La longitud de la tangente (Véase Tomo VI) siendo $y\sqrt{1+\frac{1}{y'^2}}$, se tendrá:

$$y\sqrt{1+\frac{1}{y'^2}} = a.$$

Se obtiene:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

de donde:

$$dx = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy.$$

Para integrar, pongamos:

$$y = a \operatorname{sen}\varphi, \quad \text{de donde} \quad dy = a\cos\varphi \cdot d\varphi;$$

lo que da

$$dx = a^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} - \operatorname{sen}\varphi\right)d\varphi.$$

Intengremos (ver Tomo III); se obtiene:

$$x + C = a^2\left[\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right].$$

Expresando φ en función de y tendremos la ecuación de una tractriz (1.14):

$$x + C = a^2\left[\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{a+\sqrt{a^2-y^2}} + a\sqrt{a^2-y^2}\right].$$

Problema V. — *Obtener la curva de la cual la longitud del arco es proporcional al cuadrado de la abscisa.*

— Se tendrá:

$$l = ax^2 = \frac{x^2}{2K}$$

de donde

$$dl = \frac{x\,dx}{K}.$$

o, tal como se ha visto en el Tomo II:

$$\sqrt{1 + y'^2}\, dx = \frac{x\, dx}{K}$$

Se despeja y':

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x^2}{K^2} - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - K^2}}{K}$$

o

$$dy = \frac{1}{K}\sqrt{x^2 - K^2}\, dx.$$

Integrando se obtiene, hechos todos los cálculos (Véase Tomo III):

$$y + C = \frac{1}{2K}\left[-K^2 \operatorname{Log}\left(x + \sqrt{x^2 - K^2}\right) + x\sqrt{x^2 - K^2}\right].$$

Problema VI. — *Obtener la curva de la cual el radio de curvatura es doble de la normal.*

— Deberá verificarse:

$$-\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = 2y\sqrt{1 + y'^2}$$

o

$$-\left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right) = 2y.$$

Multipliquemos por y'' y sustituyamos inmediatamente esta derivada por $\frac{y'\, dy'}{dy}$:

$$-(1 + y'^2) = 2y \cdot \frac{y'\, dy'}{dy}$$

o

$$-\frac{dy}{y} = \frac{2y'\, dy'}{1 + y'^2}.$$

Integrando, se obtiene:

$$-\operatorname{Log} y = \operatorname{Log}(1 + y'^2) + \operatorname{Log} C'$$

$$\operatorname{Log}\frac{1}{y} = \operatorname{Log} C'(1 + y'^2)$$

$$\frac{1}{y} = C'(1 + y'^2)$$

$$y\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{C'} = C$$

de donde

$$y' = \sqrt{\frac{C - y}{y}} = \frac{dy}{dx}$$

y

$$dx = \sqrt{\frac{y}{C - y}}\, dy. \tag{1}$$

Se observará que, si se pone:

$$x = \frac{1}{2} C\,(\varphi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi) \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{2} C(1 - \cos\varphi),$$

la ecuación 1 se verificará, pero estos dos valores de x e y son la ecuación de una cicloide (Véase el Tomo VI).

Problema VII. — *Obtener la curva de la cual la longitud del arco es proporcional a la pendiente de la tangente.*

— Se tiene:

$$l = Ky'.$$

Diferenciemos:

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = K d(y')$$

o

$$\frac{dx}{K} = \frac{d(y')}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Integremos:

$$\frac{x + C}{K} = \operatorname{Log}(y' + \sqrt{1 + y'^2}),$$

de donde

$$y' + \sqrt{1 + y'^2} = e^{\frac{x+C}{K}}.$$

Elevemos al cuadrado:

$$y'^2 + (1 + y'^2) + 2y'\sqrt{1 + y'^2} = e^{2\left(\frac{x+C}{K}\right)},$$

$$y'^2 + (1 + y'^2) + 2y'\left[e^{\frac{x+C}{K}} - y'\right] = e^{2\left(\frac{x+C}{K}\right)}.$$

Se convierten en:

$$1 + 2y'e^{\frac{x+C}{K}} = e^{2\left(\frac{x+C}{K}\right)}$$

de donde

$$y' = \frac{e^{2\left(\frac{x+C}{K}\right)} - 1}{2e^{\frac{x+C}{K}}},$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x+C}{K}} - e^{-\left(\frac{x+C}{K}\right)}\right).$$

Integremos de nuevo:

$$y + C' = \frac{K}{2}\left[e^{\frac{x+C}{K}} + e^{-\left(\frac{x+C}{K}\right)}\right].$$

Si se trasladan los ejes paralelamente a sí mismos (Véase el Tomo VI) y si se cambia el origen al punto donde

$$x_0 = -C \quad \text{e} \quad y = = -C',$$

se obtiene

$$y = \frac{K}{2}\left(e^{\frac{x}{K}} + e^{-\frac{x}{K}}\right)$$

que es la ecuación de una catenaria (Véase el Tomo III).

Problema VIII. — *Obtener la ecuación de la curva de la cual la pendiente de cada punto es proporcional a la abscisa x de este punto. ¿De qué tipo es esta curva?*

— Se tendrá:

$$\frac{dy}{dx} = Kx$$

o

$$dy = Kx\,dx.$$

Integremos:

$$y = \int Kx\,dx + C$$

$$= \frac{Kx^2}{2} + C,$$

que representa una familia de parábolas.

Después de lo enunciado se ve que cuanto más aumenta x, más aumenta la pendiente, y la curva tiende a hacerse más paralela al eje de las y, partiendo tangencialmente al eje de las x, ya que, para $x = 0$, la pendiente es nula.

Problema IX. — *Obtener una curva* $y = f(x)$ *tal, que el radio vector* OM *en un punto* M *cualquiera de la curva sea igual a la distancia* OT, *siendo* T *el punto donde la tangente en* M *a la curva coincide con el eje de las* y (fig. 6).

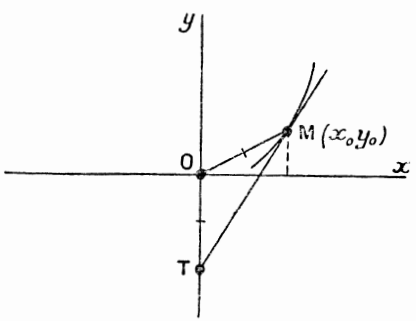


FIG. 6

— Veremos en el Tomo VI que la ecuación de la tangente a una curva en el punto M, de coordenadas x_0 e y_0 es:

$$y - y_0 = f'_{x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot (x - x_0).$$

Para el punto O, en el origen, se tiene:

$$x = 0 \quad \text{e} \quad y = OT = -OM$$

$$= -\sqrt{x_0^2 + y_0^2},$$

lo que dará:

$$-\sqrt{x_0^2+y_0^2}-y_0=-x_0\frac{dy}{dx}$$

y para obtener la ecuación general de la curva, para todos los puntos x_0 e y_0, basta suprimir los índices, es decir

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=0.$$

Como es una ecuación diferencial homogénea, pongamos, por consiguiente

$$y=ux,$$

de donde

$$dy=u\cdot dx+x\cdot du$$

y

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}.$$

La ecuación se convierte en:

$$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1+u^2}$$

o, separando variables:

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}.$$

Integremos:

$$\operatorname{Log}(u+\sqrt{1+u^2})=\operatorname{Log}x-\operatorname{Log}C=\operatorname{Log}\frac{x}{C},$$

de donde

$$u+\sqrt{1+u^2}=\frac{x}{C}$$

o, inversamente:

$$-u+\sqrt{1+u^2}=\frac{C}{x}.$$

Restemos finalmente esta ecuación de la anterior:

$$2u=\frac{x}{C}-\frac{C}{x}$$

$$2\frac{y}{x}=\frac{x}{C}-\frac{C}{x}$$

de donde

$$x^2 - 2Cy - C^2 = 0,$$

o finalmente

$$y = Kx^2 + K',$$

que representa una familia de parábolas de las que el foco es el origen de coordenadas y el eje coincide con el de las y (Véase el Tomo VI).

Problema X.— *Se consideran dos puntos* F_1 *y* F_2 *distantes entre sí* $2c$. *Obtener la curva tal que el producto de las distancias de estos puntos a cada tangente a la curva sea constante e igual a una cantidad dada* b^2 (fig. 7).

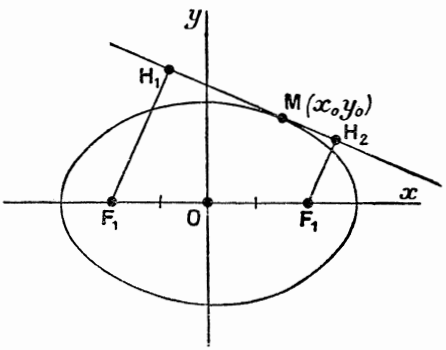


FIG. 7

— Tomemos la recta F_1F_2 como eje de las x, y como eje de las y, la perpendicular a F_1F_2 trazada desde el punto medio O. Sea un punto M cualquiera de coordenadas x_0y_0 y pongamos

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

La ecuación de la tangente en M es:

$$y - y_0 = p(x - x_0).$$

Calculemos las distancias F_1H_1 y F_2H_2. Se verá en el Tomo VI cómo entonces se tiene:

$$F_2H_2 = \frac{y_0 - px_0 + pc}{\sqrt{1 + p^2}} \qquad \text{y} \qquad F_1H_1 = \frac{y_0 - px_0 - pc}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Tendremos por consiguiente para la ecuación general de la curva, y para todos los puntos tales como M, suprimiendo los índices:

$$\frac{(y - px + pc)}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{(y - px - pc)}{\sqrt{1 + p^2}} = \pm b^2$$

o

$$\frac{(y - px)^2 - p^2c^2}{1 + p^2} = \pm b^2$$

o, haciendo $a^2 = c^2 \pm b^2$:

$$y = px + \sqrt{a^2p^2 \pm b^2}. \tag{1}$$

Esto es una ecuación del tipo:

$$y = px + \varphi(p). \tag{2}$$

Diferenciemos:

$$dy = p\,dx + x\,dp + \varphi'(p)dp$$

o

$$p \cdot dx = p \cdot dx + x \cdot dp + \varphi'(p)dp$$

o

$$[x + \varphi'(p)]dp = 0,$$

lo que da

$$dp = 0 \qquad \text{y} \qquad p = \mathrm{K}$$

y

$$x + \varphi'(p) = 0. \tag{3}$$

La ecuación 2 se convierte en:

$$y = \mathrm{K}x + \varphi(\mathrm{K}),$$

que es la integral general.

Consideremos la ecuación 3: si se despeja el valor de p para sustituirlo en la ecuación 2 se tendrá una solución particular de la ecuación diferencial.

Pero se observa que la ecuación 3 no es otra que la derivada de la ecuación 2 con respecto a p; la eliminación de p dará la solución particular.

— Así, la integral general de la ecuación 1 será

$$y = \mathrm{K}x + \sqrt{a^2\mathrm{K}^2 \pm b^2},$$

que representa líneas rectas.

Pero la respuesta al problema viene dada por la solución particular de la ecuación diferencial para la cual se tiene:

$$x + \frac{a^2K}{\sqrt{a^2K^2 \pm b^2}} = 0 \qquad \text{o} \qquad x = \frac{-a^2K}{\sqrt{a^2K^2 \pm b^2}};$$

y, sustituyendo este valor de x en la ecuación anterior, obtendremos:

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2K^2 \pm b^2}}.$$

La eliminación de K, entre esta ecuación y su derivada con respecto a K, da, después de hechos todos los cálculos:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que representa una elipse con signo +, o una hipérbola con signo —, cuyos focos son F_1 y F_2 (Véase el Tomo VI).

2.2. Problema XI. — *¿Se tiene mayor probabilidad de obtener una balanza sensible construyéndola con un brazo largo que con uno corto?*

— Demuéstrase en Física que si l es la longitud del brazo de la palanca, p el peso de esta palanca, D la distancia del centro de gravedad de la palanca a la arista de la barra central, el ángulo de inclinación α de la palanca bajo la acción de una carga m en uno de los platillos viene dada por la fórmula

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ml}{Dp}.$$

Si m pasa a dm y α a $d\alpha$, se tiene, diferenciando

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{l}{Dp}\, dm.$$

Si la sensibilidad de la balanza está dada por el cociente $\frac{d\alpha}{dm}$, que debe ser lo mayor posible para una dm dada.

La fórmula anterior producirá $\frac{d\alpha}{dm}$

$$\frac{d\alpha}{dm} = \frac{l \cos^2 \alpha}{Dp}.$$

En estado normal de equilibrio, $\alpha = 0$, se convierte en

$$\frac{d\alpha}{dm} = \frac{l}{Dp}$$

Esta fórmula indica que se aumenta la sensibilidad disminuyendo D.

Insistimos en que l y p no son independientes. Se tiene:

$$p = \rho g v$$

(ρ: masa, g: aceleración debida a la gravedad, v: volumen de la palanca).

Si se admite que las palancas quedan geométricamente semejantes entre sí, se tiene: $v = kl$, y por consiguiente:

$$s = \frac{d\alpha}{dm} = \frac{1}{D\rho g k l^2}.$$

Resulta que se mejora la sensibilidad utilizando palancas cortas y un metal de masa ligera (aleación ligera y hueca).

2. 3. Problema XII. — *Sensibilidad del termómetro de gas, de volumen constante.*

— Sea P_0 la presión del gas a 0°C, contenido un cierto volumen. Si se eleva la temperatura a t°C, la presión se convierte

$$P = P_0(1 + \alpha t) \qquad \text{con} \qquad \alpha = \frac{1}{273}$$

Si t varía a dt, P varía a dP

$$dP = P_0 \alpha \, dt,$$

expresión independiente de la temperatura t; la sensibilidad $\frac{dP}{dt} = P_0\alpha$ es, por consiguiente, constante, y proporcional a P_0.

Para el termómetro de hidrógeno, puede medirse una variación de presión de 0,01 mm., y si se toma P = 1.000 mm. de mercurio, se deduce

$$dt = \frac{dP}{P_0\alpha} = \frac{0{,}01}{1.000\,\frac{1}{273}} = 0{,}0027°C,$$

Puede, pues, apreciarse una variación de temperatura de 3 milésimas de grado!

2.4. Problema XIII. — *Superficie de equilibrio de un líquido en giro. Sea un tubo de eje vertical, conteniendo un líquido (agua, aceite, mercurio, etc) que gira rápidamente alrededor de su eje vertical con una velocidad angular constante* ω. *Obtener la ecuación de la curva de la superficie líquida* (fig. 8).

— Se sabe que el líquido se ahonda en el centro y tiende a elevarse alrededor de las paredes, debido a la inercia. Consideremos una pequeña masa m de líquido, a la distancia x del eje, influida por dos fuerzas:

1.° Su peso $P = mg$ vertical;

2.° La fuerza centrífuga $m\omega^2 x$ horizontal.

Como la velocidad de rotación es constante, la curva de la superficie del líquido permanece estable, y la fuerza F resultante de las dos anteriores debe ser perpendicular a la tangente a la curva en el punto considerado.

En efecto, siendo la curva una figura en equilibrio, para una velocidad dada, la resultante F de las fuerzas actuantes no puede ser oblicua con respecto de la tangente a la curva, ya que, si fuese así, podría descomponerse en dos componentes: una tangencial y otra perpendicular a la tangente. La componente tangencial daría como resultado el desplazamiento de la masa m siguiendo la tangente, lo que es contrario a la hipótesis... y a la realidad.

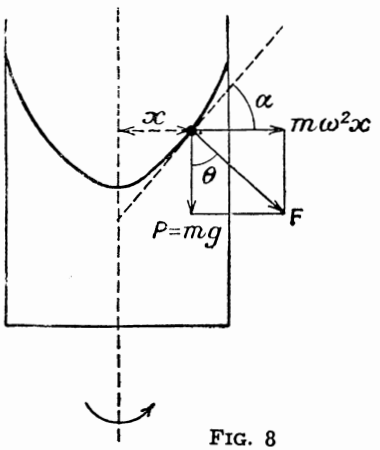


FIG. 8

— Tracemos la tangente a la curva, y resultará entonces que los ángulos α y θ son iguales, es decir, llamando $y = f(x)$, la ecuación del perfil de la curva

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\theta$$

o

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\omega^2 x}{mg}$$

$$dy = \frac{\omega^2 x}{g}\,dx = \mathrm{K}x\,dx,$$

$$y = \frac{\mathrm{K}x^2}{2} + \mathrm{C},$$

que es, por consiguiente, una parábola, de eje vertical.

2.5. Problema XIV. — *Un punto se desplaza a lo largo de una curva con velocidad constante de forma que la proyección de esta velocidad sobre una recta dada, sea proporcional al tiempo. Obtener la ecuación de la curva.*

— Tomamos como eje de las x la recta en cuestión, y como eje de las y una recta perpendicular, trazada a partir de la posición inicial del móvil. Se tiene, la longitud de la curva, para la velocidad

$$v = \frac{dl}{dt} = a \tag{1}$$

y su proyección sobre el eje de las x

$$\frac{dx}{dt} = Kt \qquad \text{de donde} \qquad x = \frac{1}{2}Kt^2,$$

por otra parte, si es v la longitud de la trayectoria y siendo la suma vectorial de $\frac{dx}{dt}$ y de $\frac{dy}{dt}$, se tiene

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2$$

de donde

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2 - K^2t^2 \tag{2}$$

Pongamos

$$Kt = a\cos\varphi$$

de donde

$$dt = -\frac{a}{K}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi,$$

y la ecuación (2) se convierte en

$$(dy)^2 = (a^2 - a^2\cos^2\varphi)\left(-\frac{a}{K}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\right)^2$$

$$= \frac{a^4}{K^2}\operatorname{sen}^4\varphi \cdot d\varphi^2$$

$$dy = \frac{a^2}{K}\operatorname{sen}^2\varphi \cdot d\varphi = \frac{a^2}{2K}(1 - \cos 2\varphi)d\varphi,$$

e integrando

$$y = \frac{a^2}{4K}(2\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi) + C.$$

Por lo tanto, para $t = 0$, se tiene $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $y = 0$,

$$C = -\frac{\pi a^2}{4K},$$

de donde, finalmente

$$y = \frac{a^2}{4K}(2\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi) - \frac{\pi a^2}{4K}. \tag{3}$$

Calculemos x en la fórmula $x = \frac{1}{2} K t^2$, remplazemos t por $\frac{a \cos \varphi}{K}$, lo que da

$$x = \frac{1}{2} K \cdot \frac{a^2}{K^2} \cos^2 \varphi = \frac{a^2}{2K} \cos^2 \varphi$$

$$= \frac{a^2}{4K}(1 + \cos 2\varphi). \tag{4}$$

Las ecuaciones (3) y (4) son las ecuaciones de la curva en forma paramétrica: *se reconoce la ecuación de una cicloide.*

2. 6. Problema XV. — Carga de un condensador eléctrico a través de una resistencia. — Hemos estudiado ya con detalle en el *Cálculo Integral* (Tomo III) la descarga de un condensador en una resistencia y hemos aprovechado para dar algunos complementos desde el punto de vista eléctrico, recalcando la gran importancia actual de tal circuito de uso corriente en Radio, Radar, y, en general, en todas las aplicaciones de la Electrónica (comprendida en ella la Televisión). *Es este un magnífico ejemplo de expresión de un problema eléctrico por una ecuación y su resolución por una ecuación diferencial* (fig. 9).

— Estudiemos ahora la carga de un condensador a través de una resistencia (fig. 9).

Sean: C la capacidad del condensador,
R el valor de la resistencia,
E la fuerza electromotriz de la fuente continua.

El condensador no se carga instantáneamente, ya que, desde que ha recibido una carga, por pequeña que sea, aparece en sus bornas una diferencia de potencial $v = \frac{q}{C}$ que actúa como una fuerza contraelectromotriz y C se carga cada vez más lentamente, ya que v aumenta poco a poco, de 0 a E.

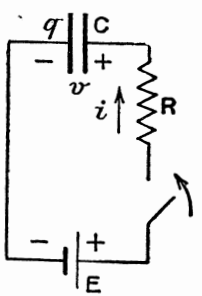


FIG. 9

Coloquémonos, por consiguiente, al comienzo de un tiempo t después de cerrar el interruptor. En este momento la corriente es i, la carga que tiene el condensador es q y la d.d.p. (*) entre los bornes es v.

Incrementemos t en dt. Durante este tiempo dt, el condensador recibe una carga dq (dt es tan pequeño que v se supone constante), y la ley de KIRCHHOFF nos da

$$i = \frac{\sum \text{f.e.m.}}{R} = \frac{E - v}{R}$$

$$Ri + v = E = Ri + \frac{q}{C},$$

ahora bien, se tiene

$dq = + i\,dt$ (q aumenta, por consiguiente, su diferencial dq es postiva).

Lo que da

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E,$$

que es una ecuación diferencial de primer orden, lineal, con coeficientes y segundo miembro constante.

Separemos las variables

$$R\frac{dq}{dt} = E - \frac{q}{C}$$

$$\frac{dq}{E - \frac{q}{C}} = \frac{1}{R}dt$$

$$\frac{C\,dq}{CE - q} = \frac{dt}{R}.$$

Integremos, y ya que buscamos la función $q = f(t)$, q varía de 0 a q (en el momento en que nos encontramos) y t, de 0 a t:

$$\int_0^q \frac{C dq}{CE - q} = \frac{1}{R}[t]_0^t$$

$$-C \cdot [\text{Log}\,(CE - q)]_0^q = \frac{t}{R}$$

(*) *Nota del Traductor.* — D.D.P. es diferencia de potencial.

$$\text{Log}\left(\frac{CE-q}{CE}\right) = -\frac{t}{CR}$$

$$\frac{CE-q}{CE} = e^{-\frac{t}{CR}}$$

$$q = CE\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

ahora bien, $CE = Q$ (carga final, al cabo de un tiempo infinito), lo que da

$$q = Q\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right).$$

Se deduce la d.d.p. v entre los bornes del condensador

$$\boxed{v = \frac{q}{C} = E\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right)}$$

e

$$i = \frac{dq}{dt} = -CE\cdot e^{-\frac{t}{CR}}\left(-\frac{1}{CR}\right) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{CR}}$$

y llamando $\frac{E}{R} = I_0$ la corriente en el momento preciso en que se se cierra el interruptor, se convierte en

$$\boxed{i = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$$

que es una exponencial decreciente bien conocida (fig. 10).

Tracemos la curva de $v = f(t)$:

para $t = 0$ $\quad v = 0$

para $t = \infty$ $\quad v = E(1-0) = E.$

Estudiemos la ecuación $v' = 0$:

$$v' = -Ee^{-\frac{t}{CR}}\left(-\frac{1}{CR}\right) = \frac{E}{CR}e^{-\frac{t}{CR}} = 0$$

es imposible anular v' para un valor finito de t, por consiguiente, v no tiene máximo ni mínimo.

Finalmente, v' es siempre positiva, por consiguiente v crece constantemente (fig. 11).

Para

$$t = 0, \qquad v' = \frac{E}{CR} = \operatorname{tg} \alpha,$$

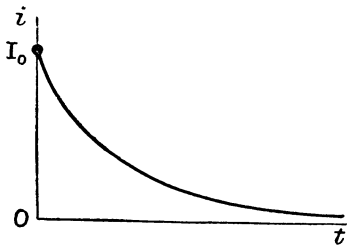


FIG. 10

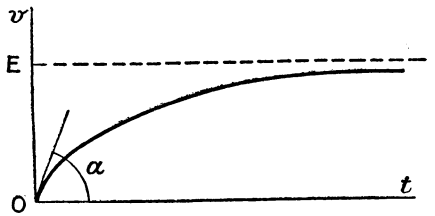


FIG. 11

El producto CR, que rige la velocidad con la cual se carga C, ha sido denominado *constante de tiempo* θ *del circuito*

$$\boxed{\theta = CR}$$

de donde

$$v_0 = \frac{E}{\theta} = \operatorname{tg} \alpha$$

por consiguiente, cuanto mayor es θ, menor es α; C se carga lentamente, y viceversa.

El producto CR mide así la inercia eléctrica del circuito.

Al cabo de un tiempo $t = \theta$, se tiene

$$v = E\left(1 - e^{-\frac{\theta}{\theta}}\right) \approx \frac{2}{3} E.$$

Finalmente, busquemos en cuánto tiempo la diferencia de potencial v será el $\frac{99}{100}$ de E (se dice que, en este momento, C está prácticamente cargado).

Se tendrá sucesivamente

$$\frac{99}{100}\,\mathbf{E} = \mathbf{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{e^{\frac{t}{CR}}}$$

$$\frac{t}{CR} = \text{Log } 100 \approx 2{,}3 \cdot \log_{10} 100 = 4{,}6.$$

de donde

$$t = 4{,}6\,CR \approx 5\theta.$$

Ejemplo. — Sea $E = 10.000$ voltios, $R = 1$ megaohmio, $C = 10$ microfaradios.

$$I_0 = \frac{E}{R} = \frac{10.000}{10^6} = 10^{-2} \text{ amperios ó } 10 \text{ mA},$$

$$\theta = CR = (10 \cdot 10^{-6})10^6 = 10 \text{ segundos.}$$

Por consiguiente, al cabo de 10 segundos, la diferencia de potencial v será $\frac{2.10000}{3} \approx 6.600$ voltios, y al cabo de 50 segundos (¡casi un minuto!) será de

$$\frac{99}{100} \cdot 10.000 = 9.900 \text{ voltios.}$$

Nota. — En realidad, cuando se calcula la constante de tiempo θ, debe englobarse en R la resistencia interna de la fuente, así como la de las conexiones.

Cálculo del efecto de Joule durante la carga.

Calculemos la cantidad de calor (expresado en julios) que aparece en R durante toda la duración de la carga.

Durante un tiempo dt, es igual a

$$dW = Ri^2\,dt.$$

$$W = \int_0^\infty Ri^2\,dt = \int_0^\infty RI_0^2 \cdot e^{-\frac{2t}{CR}}\,dt.$$

Pero, en lugar de calcular esta integral, también puede escribirse

$$W = \int Ri \cdot i dt = \int (E - v) \cdot dq$$

$$= \int_0^Q E\, dq - \int_0^Q \frac{q\, dq}{C}$$

Los nuevos límites de q son, evidentemente, 0 y Q y se obtiene:

$$W = E[q]_0^Q - \frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q = EQ - \frac{Q^2}{2C}$$

$$= E \cdot CE - \frac{C^2E^2}{2C} = \frac{1}{2} CE^2$$

De este modo, *resultado curioso*, la cantidad de calor en R es justamente igual a la energía electrostática $\frac{1}{2} CE^2$ que será acumulada en C.

La energía de la fuente, se divide, pues, en dos partes iguales:

W proporcionada por la fuente = calorías de R + W en el condensador.

$$EQ \text{ o } CE^2 = \frac{1}{2} CE^2 + \frac{1}{2} CE^2$$

2. 7. Problema XVI. — Establecimiento de la corriente en una bobina de inductancia. — Hemos estudiado ya con detalle en el *Cálculo Integral* del Tomo III la desaparición de la corriente en una bobina de inductancia. Estudiemos ahora la forma en que se establece la corriente cuando se aplica la bobina a un generador de corriente continua. Es un *excelente ejercicio poner en una ecuación un problema eléctrico y su resolución por una ecuación diferencial.*

Sea pues (fig. 12) una bobina de resistencia óhmica R de la cual la inductancia propia es L, y E la fuerza electromotriz de la fuente.

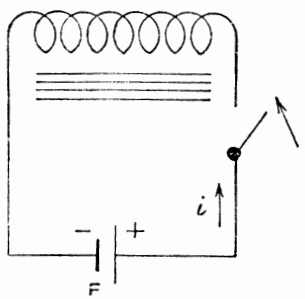


FIG. 12

La corriente no se establece al instante, y necesita algún tiempo para llegar a su valor final $I = \frac{E}{R}$. En efecto, desde que aparece una corriente en la bobina, hay un flujo Φ, y la aparición de este flujo produce una fuerza contraelectromotriz (Véanse los Tomos II y III), de la que el valor instantáneo es, en voltios:

$$e = -L \frac{di}{dt}.$$

Coloquémonos pues tras un tiempo t cualquiera después del cierre del interruptor: en este momento la corriente es i y el flujo Φ.

Incrementemos t en dt. Durante el tiempo dt, i varía en di y Φ en $d\Phi$, y la ley de KIRCHHOFF nos da

$$i = \frac{\sum \text{f.e.m.}}{R} = \frac{E + e}{R}$$

$$Ri - e = E,$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E,$$

que es una ecuación diferencial, lineal, con coeficientes constantes y segundo miembro también constante.

Separemos las variables

$$L\frac{di}{dt} = E - Ri$$

$$\frac{di}{E - Ri} = \frac{dt}{L}.$$

Integremos, variando i de 0 a i y t de 0 a t:

$$-\frac{1}{R}\left[\text{Log}\,(E - Ri)\right]_0^i = \frac{1}{L}\left[t\right]_0^t$$

$$\text{Log}\left(\frac{E - Ri}{E}\right) = -\frac{R}{L}t$$

$$\frac{E - Ri}{E} = e^{-\frac{R}{L}}$$

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}}\right)$$

$$\boxed{i = I\left(1 - e^{-\frac{R}{L}}\right)}$$

que es, por consiguiente, una curva de igual forma que la de v del ejemplo anterior, representada en la figura 13.

El cociente $\frac{L}{R}$ se llama siempre constante de tiempo θ de la bobina (Véase el Tomo III).

$$\boxed{\frac{L}{R} = \theta} \qquad \begin{cases} L \text{ en henrys} \\ R \text{ en ohmios} \\ \theta \text{ en segundos.} \end{cases}$$

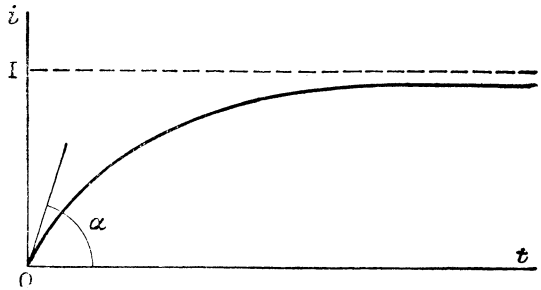


FIG. 13

Igual que en la aplicación anterior, al cabo de un tiempo $t = \theta$, la corriente i será

$$i \approx \frac{2}{3} I,$$

y tras de $t = 5\theta$, se tendrá también

$$i = \frac{99}{100} I.$$

Calculemos la tangente en el origen, tomando la derivada

$$i' = -I e^{-\frac{R}{L}t} \left(-\frac{R}{L}\right) = \frac{IR}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$$

y para $t = 0$

$$i' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{IR}{L} = \frac{I}{\theta}$$

por consiguiente, cuanto menor sea θ, mayor será α e i se establecerá rápidamente, y viceversa.

Así, θ sirve para medir la inercia magnética de la bobina.

— Calculemos ahora la energía proporcionada por la fuente.

$$E = Ri + L\frac{di}{dt},$$

multipliquemos los dos miembros por idt, que hace aparecer la energía dW proporcionada por la fuente durante el tiempo dt.

$$dW = Ei\,dt = Ri^2\,dt + Li\,di$$
$$E\,dq = Ri^2\,dt + Li\,di.$$

Integremos

$$\int_0^Q E\,dq = \int_0^\infty Ri^2\,dt + \int_0^I Li\,di$$

$$EQ = \text{calorías totales} + \frac{LI^2}{2}.$$

La energía total proporcionada por la fuente se divide en dos partes: una, calorías en R, y, otra, cierta energía $\frac{1}{2}LI^2$ que será acumulada en la forma de potencial en el flujo magnético.

Por consiguiente, *para crear flujo magnético es preciso gastar una energía*:

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

La que, además, será devuelta, en calor, cuando se corte la corriente (Φ desaparece): es la extracorriente de ruptura.

2. 8. Problema XVII. — Aplicación termodinámica.

Cuando la energía eléctrica se transforma en calor, una parte de éste eleva la temperatura del cuerpo calentado, y la otra se difunde en el medio ambiente. Determinemos cómo varía la temperatura del cuerpo caliente, en función del tiempo.

— Llamamos:

W la potencia eléctrica en vatios,

M la masa del cuerpo en gramos,

θ el aumento de temperatura del cuerpo en relación al medio ambiente,

t el tiempo en segundos,

c el calor masa (igual a la cantidad de calor necesario para elevar 1°C un gramo del cuerpo),

S la superficie total de enfriamiento, en contacto con el medio ambiente, en cm^2,

α el coeficiente de radiación, igual a la cantidad de calor radiada por 1 cm^2 en un segundo y para 1° de aumento de temperatura (en efecto, las calorías radiadas son proporcionales al aumento de temperatura θ del cuerpo).

Se observará que α depende *del calor* del cuerpo.

Apliquemos el principio de la conservación de la energía escribiendo que durante un tiempo dt, la energía eléctrica (expresada en calorías) ha sido utilizada en dos partes:

a) la primera ha servido para elevar en $d\theta$ los M gramos del cuerpo: en calorías $Mcd\theta$,

b) la segunda ha sido radiada hacia el exterior: ahora bien, 1 cm^2 radia α calorías por grado y segundo; luego para una elevación de θ°C, la cantidad total de calorías radiadas durante el tiempo dt será $\alpha S\theta dt$.

Tendremos, pues (en calorías), durante un tiempo dt

$$\frac{W dt}{4{,}18} = Mc\, d\theta + \alpha S\theta\, dt,$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{\alpha S}{Mc} \cdot \theta = \frac{W}{Mc\ 4{,}18}.$$

Pongamos

$$\frac{\alpha S}{Mc} = B \qquad y \qquad \frac{W}{4{,}18\ Mc} = D,$$

de donde la ecuación

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} + B\theta = D}$$

ecuación idéntica a la de los dos ejemplos anteriores. Separemos las variables θ y t

$$\frac{d\theta}{D - B\theta} = dt,$$

integremos

$$-\frac{1}{B} \operatorname{Log} (D - B\theta) = t + C$$

$$\operatorname{Log} (D - B\theta) = -Bt + \operatorname{Log} K'$$

$$\frac{D - B\theta}{K'} = e^{-Bt}$$

$$\theta = \frac{D - K'e^{-Bt}}{B} = \frac{D}{B} + K \cdot e^{-Bt}$$

$$\boxed{\theta = \frac{W}{4{,}18\,\alpha S} + Ke^{-Bt}}$$

Vamos a determinar la constante K por las condiciones iniciales o finales en cada caso particular.

En efecto, pueden resolverse los tres problemas siguientes:

Primer problema. — *¿Cuál es la temperatura alcanzada en régimen continuo?*

Basta hacer $t = \infty$, de donde

$$\theta = \frac{W}{4;18\,\alpha S}.$$

Segundo problema. — *¿Cuál es el aumento de temperatura al cabo de un tiempo t cualquiera, si para* $t = 0$ *el cuerpo poseyese una temperatura inicial superior a la ambiente de* θ_0?

$$\text{Para } t = 0, \quad \text{se tiene} \quad \theta_0 = \frac{W}{4{,}18\,\alpha S} + K,$$

$$K = \theta_0 - \frac{W}{4{,}18\,\alpha S},$$

sustituyendo la fórmula (1), se obtiene

$$\theta = \frac{W}{\alpha S\, 4{,}18}(1 - e^{-Bt}) + \theta_0 e^{-Bt}$$

Tercer problema. — *¿Cómo variará la temperatura* θ *si se corta la corriente?*

En este caso, se hace $W = 0$, resultando entonces

$$\theta = \theta_0 e^{-Bt}$$

que es, por consiguiente, una exponencial decreciente, y la temperatura decrece de la misma forma que disminuye la corriente, o la diferencia de potencial entre los bornes de un condensador que se descarga en una resistencia (Véase el Tomo III).

2. 9. Problema XVIII: Ley del interés compuesto.

Supongamos primeramente una cantidad y que crece con el tiempo de la siguiente forma: el aumento en cada instante es proporcional a su valor actual, y como éste crece cada vez más, el de y es cada vez mayor. Así ocurre con el aumento de los microbios (suponiendo que queden todos vivos), y con el de la población de un país.

Durante un tiempo dt, y varía en dy, su variación instantánea es $\frac{dy}{dt}$, y puede escribirse entonces, según el enunciado,

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{K}y,$$

$$\frac{dy}{y} = \mathrm{K}\,dt$$

$$\mathrm{Log}\, y = \mathrm{K}t + \mathrm{Log}\, \mathrm{C}$$

$$y = \mathrm{C}e^{\mathrm{K}t}.$$

Es, por consiguiente, una exponencial creciente, y a lo que se llega con una cantidad de dinero colocada a interés compuesto.

Sea P la cantidad de dinero que se posee al cabo de un tiempo t, y r el interés anual (expresado en tanto por ciento, por ejemplo 2 %, 10 %, etc.). Supongamos (lo que además no es totalmente el caso) que este interés se pague en cada instante, entonces, después de $t + dt$ se posee P + dP pesetas; así dP es el interés de P pesetas durante dt años al r %. Por lo tanto, puede escribirse, suponiendo dt muy pequeño

$$d\mathrm{P} = \frac{\mathrm{P}r\,dt}{100}$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{dt} = \frac{\mathrm{P}r}{100} = \mathrm{KP}$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}} = \mathrm{K}\,dt$$

y, de acuerdo con lo indicado antes

$$\mathrm{P} = \mathrm{C}e^{\mathrm{K}t}.$$

Calculemos C: para $t = 0$, P = P_0 de donde $\mathrm{P}_0 = \mathrm{C}$,

y

$$\boxed{\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 e^{\mathrm{K}t}} \qquad \text{con} \qquad \mathrm{K} = \frac{r}{100}$$

Ejemplo. — *Al cabo de cuántos años una cantidad de dinero, colocada al* $2\,^1/_2$ *por ciento, se duplica, suponiendo que se pague el interés compuesto en cada instante (y no al fin de cada año).*

— Se tiene

$$P = 2P_0$$

de donde

$$e^{Kt} = 2$$

$$Kt = \text{Log}\, 2 = 2{,}3 \log_{10} 2 = 2{,}3 \cdot 0{,}3 \text{ aproximadamente}$$

$$t = \frac{2{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 100}{r} = \frac{69}{2{,}5} = 27{,}6 \text{ años.}$$

2. 10. Problema XIX: Aumento de la población de un país.

Si la población de un país se dobla en cincuenta años, ¿en cuánto tiempo se triplica, sabiendo que la velocidad de aumento es proporcional al número actual de habitantes?

— Llamemos x al número de habitantes en el momento t, y sea x_0 en el momento $t = 0$.

Si durante un tiempo dt, la población aumenta en dx, la velocidad de aumento es $\frac{dx}{dt}$; se tendrá, por consiguiente:

$$\frac{dx}{dt} = Kx \qquad \text{o} \qquad \frac{dx}{x} = K\,dt.$$

Integremos:

$$\text{Log}\, x = Kt + \text{Log}\, C$$

$$\text{Log}\, \frac{x}{C} = Kt$$

y

$$x = Ce^{Kt}.$$

Para calcular K, se tiene $x = x_0$ para $t = 0$, o sea:

$$x_0 = C$$

de donde

$$x = x_0 e^{Kt}, \tag{1}$$

Ahora bien, para $t = 50$, se tiene $x = 2x_0$, lo que da:

$$2x_0 = x_0 e^{50K} \qquad \text{o} \qquad e^{50K} = 2.$$

Por otra parte, al cabo de un tiempo t, debe tenerse $x = 3x_0$; la ecuación l resulta entonces:

$$3 = e^{Kt}.$$

Así, tendremos:

$$3^{50} = e^{50Kt} = (e^{50K})^t$$
$$= 2^t$$

de donde

$$50 \log 3 = t \log 2$$
$$t = 50 \cdot \frac{\log 3}{\log 2} = 50 \cdot \frac{0{,}476}{0{,}3}$$
$$= 79 \text{ años.}$$

2. 11. Problema XX: Estudio de un cultivo de microbios.

En un cultivo de microbios que proliferan, la velocidad de crecimiento es proporcional a la cantidad actual. Si se comprueba que el número de microbios es el doble en 5 horas, ¿cuántos habrá al final de la décima hora?

Si hay 10^4 al cabo de 3 horas y $4 \cdot 10^4$ al cabo de 5 horas, ¿cuántos había al principio?

— Sea x el número de microbios en el tiempo t, y si, durante un tiempo dt, x aumenta en dx, se tendrá, de acuerdo con el enunciado:

$$\frac{dx}{dt} = Kx \quad \text{o} \quad \frac{dx}{x} = K\,dt.$$

Integremos

$$\text{Log } x = Kt + \text{Log C}$$
$$\text{Log } \frac{x}{C} = Kt$$

y

$$x = Ce^{Kt}. \tag{1}$$

Pero, para $t = 0$, se tiene $x = x_0$, de donde $x_0 = C$, y finalmente

$$x = x_0 e^{Kt}.$$

Es esta una ley exponencial creciente.

Para $t = 5$, se tiene $x = 2x_0$, por consiguiente:

$$2x_0 = x_0 e^{5K} \quad \text{y} \quad e^{5K} = 2.$$

Consideremos que, para $t = 10$ H, se tiene:

$$x = x_0 e^{01K} = x_0 (e^{5K})^2$$
$$= x_0 2^2 = 4x^0,$$

es decir, 4 veces el valor inicial.

— Calculemos ahora x_0

Para $t = 3$, $x = 10^4$, lo que da, de acuerdo con la ecuación 1:

$$10^4 = Ce^{3K} \qquad \text{de donde} \qquad C = \frac{10^4}{e^{3K}}.$$

Igualemos los dos valores de C:

$$\frac{10^4}{e^{3K}} = \frac{4 \cdot 10^4}{e^{5K}}$$

de donde

$$e^{2K} = 4 \qquad \text{y} \qquad e^K = 2.$$

$$x_0 = C = \frac{10^4}{e^{3K}} = \frac{10^4}{(e^K)^3}$$

$$= \frac{10^4}{2^3} = \frac{10^4}{8} = 1.250 \text{ microbios.}$$

2. 12. Problema XXI. — El espejo parabólico. — *Hallar el perfil de un reflector de revolución tal que todos los rayos procedentes de una fuente exacta* O *se reflejen bajo la forma de un haz paralelo de dirección dada* (fig. 14).

— Tomemos la fuente O como origen de coordenadas, y como eje de las x la dirección del haz de luz paralelo, y busquemos la ecuación de la curva C

$$y = f(x).$$

Tomemos un punto cualquiera de la curva M, y sean x e y sus coordenadas. Tracemos en M la tangente TT′ a la curva, y consideremos un rayo luminoso OM procedente de O y reflejado en MP.

— Como el ángulo de incidencia i debe ser igual al ángulo de reflexión r, resulta que los ángulos $TMO = \varphi$ y $T'MP = \alpha$ son iguales.

Se deduce:

$$\text{tg } xOM = \text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{ tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}.$$

Ahora bien, también se tiene:

$$\operatorname{tg} xOM = \frac{y}{x}.$$

y

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{dx}{dy}.$$

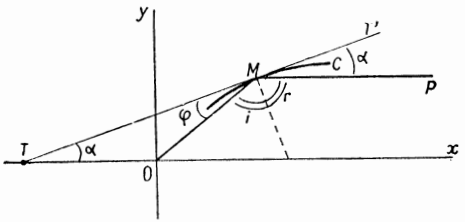


FIG. 14

Por ello la ecuación anterior se escribe:

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - y'^2}$$

o

$$2x = \frac{y}{y'} - yy' = y \cdot \frac{1}{y'} - yy'$$

Esta ecuación es homogénea, pero no muy fácil de resolver. Llegaremos a ello gracias a un artificio que consiste en una derivación con respecto a y:

$$2\frac{dx}{dy} \text{ o } \frac{2}{y'} = \frac{1}{y'} - y\frac{1}{y'^2} \cdot \frac{dy'}{dy} - y' - y\frac{dy'}{dy},$$

de donde se obtiene:

$$\frac{1}{y'} = -y' - \frac{dy'}{dy}\left(\frac{y}{y'^2} + y\right)$$

$$\frac{1 + y'^2}{y'} = -y\left(\frac{1 + y'^2}{y'^2}\right)\frac{dy'}{dy}$$

$$1 = -\frac{y}{y'} \cdot \frac{dy'}{dy}$$

y

$$\frac{dy'}{y'} = -\frac{dy}{y}.$$

Es esta una ecuación diferencial fácil de integrar:

$$\text{Log } y' = -\text{Log } y + \text{Log C}$$

e

$$y' = \frac{C}{y} = \frac{dy}{dx},$$

de donde $y\,dy = C\,dx.$

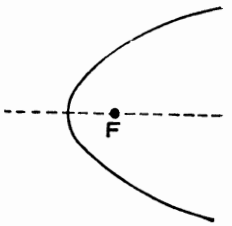


FIG. 14 *bis*

Integrando por segunda vez, se obtiene:

$$\frac{y^2}{2} = Cx + K,$$

o

$$y^2 = 2Cx + 2K. \qquad (1)$$

Pero estas dos integraciones sucesivas, que proceden de una derivación, han introducido dos constantes, mientras que la solución de una ecuación diferencial de primer orden no debe contener más que una constante.

Las dos constantes, no son, por lo mismo, independientes, y puede eliminarse una de ellas, buscando el punto en que la curva corta el eje de las y. Para este punto, $x = 0$, y se ve muy fácilmente que, siendo la tangente de 45°, para responder a la condición impuesta por el enunciado, debe verificarse: $\frac{dy}{dx} = 1.$

Ahora bien, la ecuación (1) puede escribirse en la forma:

$$x = \frac{y^2}{2C} - \frac{K}{C}$$

de donde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{C}$$

para

$$\frac{dy}{dx} = 1, \qquad y = C.$$

Sustituyendo en la ecuación (1) $x = 0$ e $y = C$, se obtiene $C^2 = 2K$.

La ecuación se reduce, por consiguiente, a:

$$y^2 = 2Cx + C^2.$$

Es esta la ecuación de una familia de parábolas de eje Ox y de foco común O. A cada una de ellas corresponde una distancia focal igual a C/2 (ya que para $y = 0$, se tiene $x = C/2$ (fig. 14 bis).

El espejo plateado es, por consecuencia, la superficie interna de una parábola de revolución.

2. 13. Problema XXII: Trabajo desarrollado por un gas comprimido.

Hemos calculado ya este trabajo en el Tomo III cuando se suponía que la presión p y el volumen v se relacionaban por la sencilla fórmula

$$pv = c^{te}$$

Supongamos ahora que el gas sigue la ley

$$pv^n = c^{te} = \mathrm{K}.$$

Si el volumen pasa de v_1 a v_2, la presión pasará de p_1 a p_2.

Sea, por ejemplo, un cilindro accionado por un pistón de sección S. Si el pistón se desplaza dx, el trabajo desarrollado por la fuerza interior actúa sobre ese pistón y

$$d\mathrm{W} = \mathrm{F} \cdot dx = p\mathrm{S} \cdot dx = p \cdot dv$$

Sdx es la variación de volumen. Se tendrá, por lo tanto

$$\mathrm{W} = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\mathrm{K}}{v^n}\, dv = \mathrm{K}\left[\frac{v^{-n+1}}{-n+1}\right]_{v_1}^{v_2}$$

$$= \frac{\mathrm{K}}{1-n}\left[v_2^{1-n} - v_1^{1-n}\right]$$

o incluso, sustituyendo K por $p_1 v_1^n$:

$$\mathrm{W} = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}\right].$$

2. 14. Problema XXIII: Variación de la presión atmosférica a causa de la altitud.

— Sea p la presión del aire a la altura h sobre el nivel del mar, y $p + dp$ la presión a la altura $h + dh$ (claramente se observa que la derivada $\dfrac{dp}{dh}$ es negativa).

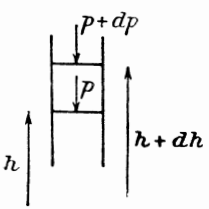


FIG. 15

La ecuación fundamental de la hidrostática permite escribir (fig. 15):

$$p = p + dp + \frac{\rho\, s\, dh\, g}{s},$$

(ρ: masa del gas a la presión p y temperatura absoluta T; g: aceleración debida a la gravedad que se supone invariable),

sea:

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g$$

Consideremos el aire como un *gas perfecto*. Puede escribirse:

$$pV = mrT,$$

(m: masa del gas de volumen V; r es una constante característica del gas estudiado),
de donde:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p}{rT}.$$

Primer caso. — Supongamos que la temperatura permanece constante. Puede escribirse:

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{pg}{rT} = -Kp,$$

$$\frac{dp}{p} = -K\,dh.$$

Integremos

$$\operatorname{Log} p = -Kh + \operatorname{Log} C$$
$$p = Ce^{-Kh},$$

para

$$h = 0, \quad p = p_0 \quad \text{lo que da} \quad p_0 = C.$$

de donde

$$\boxed{p = p_0 e^{-Kh}}$$

Se trata de una exponencial decreciente.

Segundo caso. — *Supongamos que el aire sigue la ley* $pV^n = C^{te}$. *La temperatura no es constante.*

La ley anterior puede escribirse:

$$p^{\frac{1}{n}} V = C^{te}, \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{V} = kp^{\frac{1}{n}}$$

Para una masa de gas dada, se tiene:

$$\frac{p}{T} = \frac{mr}{V} = \frac{k'}{V} = k'' p^{\frac{1}{n}}$$

La ecuación inicial se convierte en

$$\frac{dp}{dh} = -Kp^{\frac{1}{n}}$$

Separemos las variables

$$\frac{dp}{p^{\frac{1}{n}}} = -K\,dh$$

integremos

$$\int p^{-\frac{1}{n}}\,dp = -Kh + C$$

$$\frac{p^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1} = -Kh + C. \qquad (1)$$

Calculemos la constante C: para $h = 0$, $p = p_0$, de donde

$$\frac{p_0^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1} = C,$$

sustituyamos en la ecuación (1) y simplifiquemos

$$Kh = \frac{n}{n-1}\left[p_0^{1-\frac{1}{n}} - p^{1-\frac{1}{n}}\right]$$

$$Kh = \frac{np_0^{1-\frac{1}{n}}}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{n}}\right], \qquad (2)$$

pero cuando $h = 0$, $p = p_0$ y $a = a_0$, se tiene

$$a_0 = Kp_0^{\frac{1}{n}} \quad \text{de donde} \quad K = \frac{a_0}{p_0^{\frac{1}{n}}}.$$

Sustituyamos este valor de la ecuación (2), lo que da

$$h = \frac{n}{n-1}\frac{p_0}{a_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{n}}\right]. \qquad (3)$$

Se pueden introducir las temperaturas; se sabe que:

$$\frac{pV}{p_0V_0} = \frac{T}{T_0}, \tag{4}$$

pero

$$\frac{p}{p_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)^n = 1 \qquad \text{de donde} \qquad \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{V}{V_0},$$

y sustituyendo en la ecuación (4)

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{1}{n}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{n}}$$

Sustituyamos en la ecuación (3), resultando

$$h = \frac{n}{n-1}\frac{p_0}{a_0}\left(1-\frac{T}{T_0}\right).$$

2. 15. Problema XXIV: Movimiento de un proyectil en el aire. — *Busquemos la ley de desplazamiento de un proyectil en el aire, de acuerdo con que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad.*

Llamemos x al espacio recorrido horizontalmente, v la componente horizontal de la velocidad e y la aceleración horizontal.

$$\gamma = \frac{dv}{dt} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{dx}{dt}.$$

Supongamos que la fuerza retardatriz R debida al aire sea proporcional a la velocidad v, y, como por otra parte es también proporcional a la sección del proyectil (es decir al cuadrado del diámetro D), puede escribirse

$$R = K\,vD^2.$$

Si m es la masa del proyectil $\left(m = \frac{P}{g}\right)$ aplicando la fórmula fundamental de Mecánica, e insistiendo en que R es una fuerza retardatriz, es posible decir que

$$-R = m\gamma = \frac{P}{g}\gamma$$

o

$$K\,vD^2 = -\frac{P}{g}\frac{dv}{dt}.$$

Separemos las variables

$$\frac{dv}{v} = -\frac{KD^2g}{P}dt = -A\,dt$$

Integremos

$$\text{Log}\, v = -At + \text{Log}\, C$$
$$v = Ce^{-At}$$

Para

$$t = 0, \qquad v = V_0 \qquad \text{de donde} \qquad V_0 = C,$$

lo que da

$$v = V_0e^{-At} = \frac{dx}{dt}$$

$$x = \int V_0e^{-At}\,dt + K = -\frac{V_0}{A}e^{-At} + K,$$

ahora bien, para

$$t = 0, \qquad x = 0, \qquad \text{de donde } K = 0,$$

y

$$x = -\frac{V_0}{A}e^{-At} = Me^{-At}$$

fórmula que da el alcance del tiro.

2. 16. Problema XXV: Ley de la caída de los cuerpos.

En el Tomo III no hemos tenido en cuenta la resistencia del aire pero vamos a suponer que ahora la consideremos.

Estudiaremos dos casos:

Primer caso. — La resistencia del aire es proporcional a la velocidad v.

Llamemos R a la fuerza retardatriz, escribiendo, por consiguiente:

$$R = Kv$$

donde K depende de la forma del cuerpo.

Si P es el peso del cuerpo, la fórmula fundamental de la dinámica da, llamando a a la aceleración:

$$\sum F = P - Kv = ma$$

$$mg - Kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m}v = g,$$

ecuación lineal de coeficientes y segundo miembro constantes.

Separemos las variables

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{K}{m}v = \frac{gm - Kv}{m}$$

$$\frac{m\,dv}{gm - Kv} = dt$$

Integremos

$$\int \frac{m\,dv}{gm - Kv} = t + \text{Log C}.$$

$$-\frac{m}{K}\text{Log}\,(gm - Kv) = t + \text{Log C}$$

$$\text{Log}\,(P - Kv) = -\frac{K}{m}t + \text{Log C}'$$

$$\frac{P - Kv}{C'} = e^{-\frac{K}{m}t}$$

$$v = \frac{P - C'e^{-\frac{K}{m}t}}{K} \qquad (1)$$

ahora bien, para $t = 0$, $v = 0$, de donde

$$C' = \frac{P}{K}$$

sustituyamos en (1), lo que da

$$\boxed{v = \frac{P}{K}\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right)}$$

Si t es grande, la exponencial tiende a 0, y v tiende a su valor final

$$V = \frac{P}{K}.$$

Entonces puede deducirse el espacio recorrido x, ya que:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

y

$$x = \int v\,dt + C = \int \frac{P}{K}\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right) dt + C$$

$$= \frac{P}{K}\left(t + \frac{m}{K}e^{-\frac{K}{m}t}\right) + C.$$

Para $t = 0$, $x = 0$, lo que da

$$0 = \frac{P}{K}\cdot\frac{m}{K} + C \quad \text{de donde} \quad C = -\frac{Pm}{K^2}$$

y

$$x = \frac{P}{K}\left(t + \frac{m}{K}e^{-\frac{K}{m}t}\right) - \frac{Pm}{K^2}$$

$$= \frac{P}{K}t - \frac{Pm}{K^2}\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right).$$

Se observa que si t es grande, queda $x = \frac{P}{K}t$, el movimiento es uniforme, y de velocidad $\frac{P}{K}$.

Segundo caso — La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad v.

Escribiremos:

$$R = gKv^2,$$

lo que permitirá simplificar la escritura de los cálculos que siguen.

$$\sum \text{de las fuerzas} = ma,$$

o

$$mg - gKv^2 = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{Kv^2}{m}\right);$$

pongamos $\frac{K}{m} = \alpha$, de donde

$$\frac{dv}{dt} = g(1 - \alpha^2 v^2),$$

o

$$\frac{dv}{1 - \alpha^2 v^2} = g \cdot dt.$$

Integremos:

$$\int \frac{dv}{1 - \alpha^2 v^2} = gt + C,$$

o

$$\frac{1}{2}\int \frac{dv}{1 + \alpha v} + \frac{1}{2}\int \frac{dv}{1 - \alpha v} = gt + C$$

$$\frac{1}{2\alpha}[\text{Log}\,(1 + \alpha v) - \text{Log}\,(1 - \alpha v)] = gt + C,$$

o

$$\frac{1}{2\alpha}\text{Log}\frac{1 + \alpha v}{1 - \alpha v} = gt + C.$$

Pero, para $t = 0$, $v = 0$, de donde $C = 0$. Queda:

$$\frac{1}{2\alpha}\text{Log}\frac{1 + \alpha v}{1 - \alpha v} = gt$$

$$\frac{1 + \alpha v}{1 - \alpha v} = e^{2\alpha g t}$$

de donde

$$\alpha v(e^{2\alpha g t} + 1) = e^{2\alpha g t} - 1$$

y

$$v = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{e^{2\alpha g t} - 1}{e^{2\alpha g t} - 1},$$

o

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha g t,$$

$$dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha g t \cdot dt.$$

Integremos:

$$x = \frac{1}{\alpha} \int \operatorname{tg} \alpha g t \cdot dt + C$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int \frac{\sec \alpha g t}{\operatorname{cosec} \alpha g t} \cdot dt + C$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 g} \cdot \operatorname{Log} (\operatorname{cosec} \alpha g t) + C,$$

pero, para $t = 0$, $x = 0$, de donde $C = 0$. Queda:

$$x = \frac{1}{\alpha^2 g} \operatorname{Log} (\operatorname{cosec} \alpha g t) = \frac{m}{Kg} \operatorname{Log} \left(\operatorname{cosec} g \sqrt{\frac{K}{m}} t \right),$$

que es la fórmula buscada.

2.17. Problema XXVI: Establecimiento de la fórmula fundamental de la corriente eléctrica alterna.

— En un circuito donde hay una fuerza electromotriz alterna E debida a una variación de flujo, que tiene una resistencia R en serie y la bobina de inductancia propia L, busquemos la relación que existe entre la corriente, la f.e.m. (*) y las constantes del circuito.

Planteamiento del problema por una ecuación.

Supongamos pues un cuadro, con N espiras, de superficie S, dando vueltas en un campo magnético de inducción B y cerrado en un circuito exterior (figs. 16 y 17).

Este cuadro gira regularmente describiendo ángulos α proporcionales al tiempo t

$$\alpha = Kt,$$

para $t = 1s$, $\alpha = K$; ahora bien, se sabe que el ángulo descrito en un segundo es, por definición, igual a la velocidad angular ω, de donde $\alpha = \omega t$.

(*) *Nota del Traductor.* — F.E.M. significa fuerza electromotriz.

Durante un tiempo dt, el flujo captado por el cuadro varía en $d\Phi$ y hay una f.e.m. inducida en el cuadro igual a

$$e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

Se tiene, por consiguiente, una corriente instantánea $i = \frac{e}{R}$.

Pero tengamos en cuenta que el flujo captado comprende a su vez dos flujos:

1.° el flujo procedente del polo norte

$$\Phi_1 = \text{BNS sen } \omega t.$$

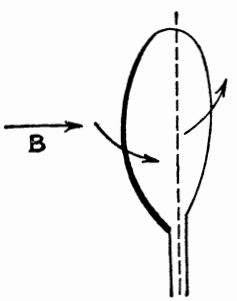
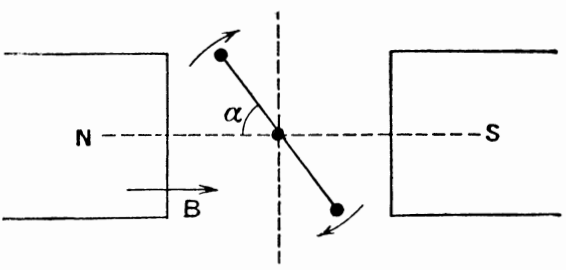


FIG. 16



Vista en el plano

FIG. 17

2.° el flujo propio engendrado por el cuadro que es recorrido por la corriente i, y que, en webers, es igual a

$$\Phi_2 = Li \qquad \begin{pmatrix} L \text{ en henrys} \\ i \text{ en amperios} \end{pmatrix}.$$

Se tiene así

$$\Phi_{\text{total}} = \Phi_1 + \Phi_2 = \text{BNS sen } \omega t + Li$$

de donde

$$\frac{d\Phi}{dt} = \text{BNS}\omega \cos \omega t + L\frac{di}{dt}.$$

La fuerza electromotriz inducida es, por consiguiente, lo que da una corriente instantánea

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\text{BNS}\omega \cos \omega t - L\frac{di}{dt},$$

lo que da una corriente instantánea

$$i = \frac{e}{R} = \frac{-BNS\omega}{R}\cos \omega t - \frac{L}{R}\frac{di}{dt}$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = -BNS\,\omega \cos \omega t,$$

Ahora bien, Ri y $L\frac{di}{dt}$ representan voltios, por consiguiente $BNS\omega$ representa igualmente voltios, esto es, la fuerza electromotriz máxima E igual a $BNS\omega$; volviendo al origen de tiempos $\frac{\pi}{2\omega}$, se obtiene la ecuación diferencial fundamental

$$\boxed{L\frac{di}{dt} + Ri = E \operatorname{sen} \omega t}$$

que dará, una vez resuelta, $i = f(t)$, aclarando al lector que la letra L representa, en todo el cálculo que sigue, la inductancia propia de la bobina.

Resolución.

Observemos que vamos a resolver una ecuación diferencial de primer orden, con coeficientes constantes, lineal y con segundo miembro variable.

— Empleemos el método de variación de las constantes, resolviendo primeramente la ecuación sin segundo miembro.

1.º

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$L\frac{di}{dt} = -Ri$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt.$$

Integremos

$$\operatorname{Log} i = -\frac{R}{L}t + \operatorname{Log} C$$

y, finalmente

$$i = Ce^{-\frac{R}{L}t} \qquad (1)$$

2.° Consideremos ahora C como una función de t y diferenciemos este producto.

$$di = e^{-\frac{R}{L}t}\, dC + Ce^{-\frac{R}{L}t}\left(-\frac{R}{L}\right) dt.$$

Sustituyamos la ecuación completa

$$L\left(e^{-\frac{R}{L}t}\frac{dC}{dt} - C\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right) + RCe^{-\frac{R}{L}t} = E \operatorname{sen} \omega t$$

los 2.° y 3.° términos se anulan, quedando

$$L \cdot e^{-\frac{R}{L}t}\frac{dC}{dt} = E \operatorname{sen} \omega t$$

que es una ecuación diferencial de la que pueden separarse las variables:

$$dC = \frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t\, dt$$

$$C = \frac{E}{L}\int e^{\frac{R}{L}t} \operatorname{sen} \omega t\, dt. \qquad (2)$$

Integremos por partes, poniendo

$$\left|\begin{array}{l} u = e^{\frac{R}{L}t} \quad \text{de donde} \\ dv = \operatorname{sen} \omega t\, dt \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} du = e^{\frac{R}{L}t}\frac{R}{L}dt \\ v = -\frac{1}{\omega}\cos \omega t, \end{array}\right.$$

y

lo que da

$$C = \frac{E}{L}\left[e^{\frac{R}{L}t}\left(-\frac{1}{\omega}\cos \omega t\right) - \int -\frac{1}{\omega}\cos \omega t \cdot \frac{R}{L}e^{\frac{R}{L}t}\, dt\right]$$

$$= \frac{E}{L\omega}\left[-e^{\frac{R}{L}t}\cos \omega t + \frac{R}{L}\int \cos \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t}\, dt\right].$$

Integremos por partes, teniendo

$$\text{y} \quad \left| \begin{array}{ll} u = e^{-\frac{R}{L}t} & \text{de donde} \\ dv = \cos \omega t \, dt & \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} du = \dfrac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} dt \\ v = \dfrac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t, \end{array} \right.$$

lo que da

$$C = \frac{E}{L\omega}\left[-e^{-\frac{R}{L}t}\cos \omega t + \frac{R}{L}\left(e^{-\frac{R}{L}t}\cdot\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega t - \int\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\cdot\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}dt\right)\right]$$

$$= \frac{E}{L\omega}\left[e^{-\frac{R}{L}t}\left(-\cos\omega t + \frac{R}{L\omega}\operatorname{sen}\omega t\right) - \frac{R^2}{L^2\omega}\int e^{-\frac{R}{L}t}\operatorname{sen}\omega t\, dt\right]$$

y, desarrollando, vuelve a obtenerse C en el último término después de la ecuación (2)

$$C = \frac{Ee^{-\frac{R}{L}t}}{L\omega}\left(\frac{R}{L\omega}\operatorname{sen}\omega t - \cos\omega t\right) - \frac{R^2E}{L^3\omega^2}\cdot\frac{CL}{E}$$

de donde

$$C\left(1 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}\right) = \frac{Ee^{-\frac{R}{L}t}}{L\omega}\left(\frac{R}{L\omega}\operatorname{sen}\omega t - \cos\omega t\right)$$

y

$$C = \frac{L^2\omega^2}{R^2 + L^2\omega^2}\cdot\frac{Ee^{-\frac{R}{L}t}}{L\omega}\left(\frac{R\operatorname{sen}\omega t - L\omega\cos\omega t}{L\omega}\right)$$

$$= \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}e^{-\frac{R}{L}t}(R\operatorname{sen}\omega t - L\omega\cos\omega t).$$

Pero, en realidad, es preciso añadir una constante de integración K. Sustituyamos este valor de C en la ecuación (1), lo que da

$$i = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i = \left[\frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}e^{-\frac{R}{L}t}(R\operatorname{sen}\omega t - L\omega\cos\omega t) + K\right]e^{-\frac{R}{L}t},$$

$$i = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}(R \operatorname{sen} \omega t - L\omega \cos \omega t) + Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

Discusión y consecuencias.

El término $Ke^{-\frac{Rt}{L}}$ es transitorio y desaparece rápidamente al cabo de algunos períodos, quedando no sólo

$$i = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}(R \operatorname{sen} \omega t - L\omega \cos \omega t).$$

Esta corriente es, por lo tanto, la suma de otras dos, de las que los valores instantáneos son

$$i_1 = \frac{ER}{R^2 + L^2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t, \qquad \text{en fase con E}$$

$$i_2 = -\frac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \cos \omega t$$

$$= +\frac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2} \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \text{ por consiguiente en cuadratura}$$

detrás de E.

Esto es lo que expresa la figura 18, donde los vectores representan los valores máximos, como se sabe, y que son iguales a

$$I_1 = \frac{ER}{R^2 + L^2\omega^2} \qquad \text{e} \qquad I_2 = \frac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}$$

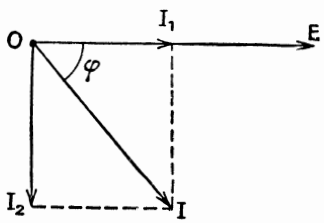


FIG. 18

I_1 es la corriente en vatios, que produce la potencia y el efecto de Joule; I_2 es la corriente sin vatios, que da lugar al flujo magnético y a la inductancia.

La corriente resultante es la suma geométrica de estas dos corrientes

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \sqrt{\frac{E^2(R^2 + L^2\omega^2)}{(R^2 + L^2\omega^2)^2}}$$

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{E}{Z}$$

(Z = impedancia del circuito)

desfasadas detrás de E de un ángulo φ tal que

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_2}{I_1} = \frac{L\omega}{R}}$$

Se insiste en que los componentes i_1 e i_2 de la corriente i son corrientes sinusoidales, de las que la pulsación es ω, es decir, igual a la velocidad angular del cuadro. Por consiguiente

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{y} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}.$$

Todos estos resultados son muy interesantes, dado el punto de partida: un cuadro girando regularmente en un campo magnético, sin otra hipótesis sobre la naturaleza de la corriente.

Tal estudio es un magnífico ejemplo de la aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden, lineales, con coeficientes constantes y segundo miembro variable.

2. 18. Problema XXVII: Hallar la ecuación de las curvas adiabáticas de los gases perfectos. — Se sabe que una transformación es adiabática cuando no arrastra ni la cesión por el exterior, ni el escape por el gas de una cantidad de calor; en una palabra, es una transformación donde la cantidad de calor intercambiada entre el gas y el medio exterior es constante, donde $dQ = 0$.

— Supongamos, por consiguiente, un gas perfecto; sigue la ley $pv = RT$, en donde p es la presión, v el volumen, T la temperatura absoluta $(t + 273)$ y R una constante.

Coloquémoslo en un recipiente que sea perfectamente calorífugo. Hagamos una variación de volumen dv a presión constante. Si dT_1 es la variación de temperatura correspondiente y C el calor de la masa a presión constante, el gas desprende (suponiendo una masa de gas $m = 1$) una cantidad de calor

$$dQ_1 = C dT_1.$$

Hagamos a continuación una variación dp de presión, a volumen constante, y sea dT_2 la variación de temperatura, se tendrá, llamando c al calor de la masa a volumen constante, una cantidad de calor desprendido igual a

$$dQ_2 = c dT_2,$$

de donde

$$dQ = dQ_1 + dQ_2 = C\,dT_1 + c dT_2 = 0.$$

Ahora bien, la ecuación $pv = RT$ nos da, diferenciando,

$$p\,dv = R\,dT_1 \qquad \text{ya que} \qquad v\,dp = R\,dT_2.$$

Se tendrá así:

$$dQ = C\frac{p\,dv}{R} + c\frac{v\,dp}{R}$$

$$= \frac{1}{R}(C\,p\,dv + c\,v\,dp) = 0$$

$$C\,p\,dv + c\,v\,dp = 0,$$

dividamos por $c\,pv$

$$\frac{C}{c}\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0$$

$$\frac{C}{c}\frac{dv}{v} = -\frac{dp}{p}$$

Integremos, suponiendo que $\frac{C}{c}$ es independiente de la temperatura,

$$\text{Log}\, v^{\frac{C}{c}} = -\text{Log}\, p + \text{Log}\, K$$

o, poniendo $\frac{C}{c} = \gamma$,

$$\boxed{pv^{\gamma} = K}$$

que es la ecuación de las curvas adiabáticas.

Aplicación numérica. — Llamemos p_1 y v_1 a los valores correspondientes a una temperatura T_1, se tendrá

$$pv^{\gamma} = p_1 v_1^{\gamma} = C^{te}$$

$$\frac{pv^{\gamma}}{p_1 v_1^{\gamma}} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{pv}{p_1 v_1} = \frac{RT}{RT_1} = \frac{T}{T_1}$$

Se deduce

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\gamma - 1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1 - \frac{1}{\gamma}}.$$

Para el aire, $\gamma = 1{,}4 = \frac{7}{5}$, de donde

$$1 - \gamma = -\frac{2}{5} \qquad \text{y} \qquad 1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{7}.$$

Supongamos un encendedor de aire en el cual se comprime bruscamente el mismo, tomado, por ejemplo, a una temperatura cero (Celsius), y suponiendo el gas reducido a $\frac{1}{10}$ de un volumen por compresión adiabática. Entonces se tiene (ya que $T_1 = 273°$ K):

$$\frac{T}{273} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\frac{2}{5}} = 10^{\frac{2}{5}} = 10^{0,4}; \qquad T = 273 \cdot 10^{\frac{2}{5}};$$

$$\log T = \log 273 + \frac{2}{5}\log 10 = 2,43616 + 0,4 = 2,83616;$$

$$T = 686° \text{ K}; \qquad t = 413° \text{ C},$$

la temperatura suficiente para inflamar un trozo de tela atada al pistón.

— Calculemos ahora el enfriamiento producido por una expansión adiabática

Sea una masa de gas a 0° C a una presión p de 100 atmósferas, que bajamos soltándolo hasta una atmósfera; se tendrá

$$\frac{T}{273} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{7}} = \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{2}{7}}$$

$$\log T = \log 273 + \frac{2}{7}\log\frac{1}{100} = 2,43616 + \frac{2}{7}(-2)$$

$$= 1,86473,$$

$$T = 73° \text{ K} \qquad \text{y} \qquad t = -200° \text{ C}.$$

Así se comprende por qué puede producirse la nieve carbónica sólida, dando escape a bióxido de carbono gaseoso muy comprimido.

— Estos valores son aproximados, ya que las dos transformaciones anteriores no son rigurosamente adiabáticas y regidas por la fórmula

$$pv^{\gamma} = C^{te}$$

CAPITULO III

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

3. 1. Generalidades. Solamente estudiaremos el caso en que los coeficientes sean constantes, ya que este es el tipo de ecuación que se encuentra más frecuentemente en Física, Electricidad, Mecánica, etcétera.

Estas ecuaciones se presentan bajo la forma general siguiente, donde x es la variable e y la función:

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = 0 \quad \text{o} \quad f(x),$$

los coeficientes A, B y C son, por hipótesis, constantes, *y el segundo miembro puede ser nulo, una función de x solo, o, finalmente, una constante* D.

Se trata de obtener la función $y = f(x)$. Pero como, muy a menudo, éstas se encuentran en las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden incompletas, empezaremos por estudiarlas, después examinaremos el caso general, y, finalmente, haremos aplicaciones a diferentes ramas de la Física y Mecánica.

ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN INCOMPLETAS

Son de cuatro tipos diferentes:

1.°) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ o C^{te}

2.°) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y)$

3.°) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \dfrac{dy}{dx}\right)$

4.°) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \dfrac{dy}{dx}\right)$.

3. 2. Primer tipo: $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$. *o bien de una constante.*

— Empezaremos por este tipo de ecuación, ya que es el más fácil de integrar.

Basta, para hallar la función $y = f(x)$, integrar dos veces seguidas. Pero se nos presenta un problema de escritura, y al que, si no se le presta atención, se corre el riesgo de incurrir en errores, que también vamos a exponer con detalle

Se sabe, en efecto, que no se puede integrar mientras no exista dx.

Escribiremos por consiguiente

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x),$$

multipliquemos los dos miembros por dx

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = f(x) \cdot dx$$

denominándose el primero: «*diferencial de* $\frac{dy}{dx}$».

Integremos

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int f(x)dx + C.$$

llamemos $F(x)$ al resultado de la integral de la derecha, lo que da (ya que $\int dy = y$):

$$\frac{dy}{dx} = F(x) + C$$

$$dy = F(x)dx + Cdx,$$

y se reduce a una ecuación de primer orden. Integremos

$$y = \int F(x)dx + Cx + C'.$$

Así se observa que se obtienen dos constantes.

— Hemos hecho dos integrales sucesivas, lo cual es, en suma, una integral doble.

Ejemplo. — Sea $\frac{d^2y}{dx^2} - 4x = 0.$

— Se escribirá

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x$$

o incluso

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x,$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x\,dx.$$

Integremos

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int 4x\,dx + C$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + C$$

$$dy = 2x^2\,dx + C\,dx$$

y finalmente

$$y = \frac{2}{3}x^3 + Cx + C'.$$

la solución tiene dos constantes.

NOTA I. — Este procedimiento puede emplearse para una ecuación de orden superior al segundo .

Ejemplo: Sea la ecuación $\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x$

— Basta integrar tres veces seguidas. Se escribirá

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = xe^x$$

o

$$d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = xe^x\,dx.$$

Integremos (el segundo miembro se integra por partes):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int xe^x\,dx + C = xe^x - e^x + C.$$

Después se escribirá

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = xe^x - e^x + C$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = xe^x\,dx - e^x\,dx + C\,dx$$

Integremos

$$\frac{dy}{dx} = \int xe^x\,dx - \int e^x\,dx + Cx + C_1$$

$$= (xe^x - e^x) - e^x + Cx + C_1.$$

$$= xe^x - 2e^x + Cx + C_1.$$

$$y = \int xe^x\,dx - 2\int e^x\,dx + C\int x\,dx + \int C_1\,dx + C_2$$

$$= xe^x - 3e^x + C\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2,$$

así hay tres constantes.

NOTA II. — El mismo procedimiento se emplea igualmente cuando el segundo miembro es una constante.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = K.$$

3. 3. Primera aplicación. — *Hallar la ley de la caída de los cuerpos sabiendo que la aceleración es constante e igual a g. Se despreciará la resistencia del aire.*

— Cuando se pide hallar la ley del movimiento de un cuerpo cualquiera, trátase de obtener la función que da el espacio recorrido x en función del tiempo t, sea $x = f(t)$.

Se sabe que, de forma general, la velocidad v es la derivada con respecto al tiempo del espacio recorrido, y que la aceleración es la derivada de la velocidad (Véase el Tomo I):

$$v = \frac{dx}{dt}$$

y derivando la velocidad, se obtiene la aceleración g:

$$g = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

lo que puede escribirse

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = g$$

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right) = g\,dt$$

Integremos

$$\frac{dx}{dt} = gt + C = v.$$

Si para $t = 0$, la velocidad inicial es V_0, tendremos

$$0 + C = V_0$$

de donde, sustituyendo en v

$$v = \frac{dx}{dt} = gt + V_0$$

Se obtiene

$$dx = gt\,dt + V_0\,dt$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t + K.$$

Si para $t = 0$ se tiene $x = 0$, queda $K = 0$, lo que da finalmente

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t.$$

Lanzando el cuerpo al alto en lugar de abajo, V_0 es negativa, pues esta velocidad es de signo contrario a la debida a la gravedad, lo que da

$$x = \frac{1}{2}gt^2 - V_0t.$$

Finalmente, si V_0 es nula, queda la conocida fórmula:

$$\boxed{x = \frac{1}{2}gt^2}$$

el espacio recorrido en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo.

Estudiaremos después el caso general en el que se tiene en cuenta la resistencia del aire.

3. 4. Segunda aplicación. — *Una fuerza constante actúa sobre un volante, de tal suerte que su aceleración angular es + 2 radianes por segundo por segundo. Si se llama* θ *el ángulo descrito por el volante al cabo del tiempo t, hallar la función* $\theta = f(t)$, *suponiendo que el volante parte del reposo. ¿Al cabo de cuánto tiempo su velocidad será de* 1.000 *vueltas por minuto y cuántas vueltas habrá dado durante el primer minuto?*

— La aceleración angular es $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, expresada en radianes por segundo por segundo.

Se tendrá, por consiguiente.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = + 2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = + 2$$

$$d\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = 2dt.$$

Integremos

$$\frac{d\theta}{dt} = 2t + C, \tag{1}$$

ahora bien, $t = 0$, la velocidad angular $\frac{d\theta}{dt}$ es nula, de donde

$$0 = 0 + C \qquad \text{y} \qquad C = 0.$$

Sustituyamos en (1), lo que da

$$\frac{d\theta}{dt} = 2t$$

$$d\theta = 2t\,dt$$

e integrando

$$\theta = t^2 + C'. \tag{2}$$

Ahora bien, para $t = 0$, $\theta = 0$, ya que se cuentan los ángulos a partir del arranque del volante; por consiguiente:

$$0 = C',$$

y:

$$\theta = t^2, \tag{3}$$

que es la ley buscada.

La cantidad $\frac{d\theta}{dt}$ es la velocidad angular ω, y, si se denomina N el número de vueltas por minuto, sábese que

$$\omega = \frac{2\pi N}{60},$$

se tendrá,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi N}{60} = 2t$$

y para N = 1.000, se obtiene

$$t = \frac{\pi 1.000}{60} = 52{,}4 \text{ segundos.}$$

Durante el primer minuto el número de vueltas dadas por el volante viene dado por la fórmula (3), *en radianes*

$$\theta = t^2 = 60^2,$$

y ese número de vueltas es

$$\frac{60^2}{2\pi} = 573 \text{ vueltas.}$$

3. 5. Segundo tipo. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$.

El procedimiento anterior puede no convenir; también se emplea otro indirecto, muy ingenioso.

Multipliquemos los dos miembros por $2\frac{dy}{dx}dx$:

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}dx = 2f(y)\ \frac{dy}{dx}dx,$$

y, simplificando el segundo miembro:

$$= 2f(y)dy.$$

El miembro de la izquierda es la *diferencial de* $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$. En efecto, se tiene, diferenciando:

$$d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = d[u^2] = 2u\,du$$

$$= 2\frac{dy}{dx}\cdot du,$$

ahora bien, lo que llamamos du, es la *diferencial de* $\frac{dy}{dx}$, y esta diferencial es igual a $y''dx$ o $\frac{d^2y}{dx^2}dx$. Por ello, lo que enunciamos antes es bien exacto.

Tendremos también, volviendo a la ecuación inicial:

$$d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2f(y)dy.$$

Integremos, resultando

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \int 2f(y)dy + K.$$

Haciendo esta integral con respecto a y, se obtendrá una expresión que llamaremos $F(y)$,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = K + F(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{K + F(y)},$$

llegándose a una ecuación de primer orden en la que pueden separarse las variables

$$\frac{dy}{\sqrt{K + F(y)}} = dx,$$

Integrando, se obtendrá $y = f(x)$.

Ejemplo. — *Sea la ecuación*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0.$$

— Se escribirá sucesivamente

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y,$$

y, multiplicando los dos miembros por $2\frac{dy}{dx}dx$

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}dx = -2a^2y\frac{dy}{dx}dx = -2a^2y\,dy$$

o, como antes

$$d\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2 = -2a^2y\,dy.$$

Integremos

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -2a^2\int y\,dy + K^2.$$

representando K^2 la constante, lo que simplifica la continuación de los cálculos:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = K^2 - a^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{K^2 - a^2y^2}$$

Separemos variables

$$\frac{dy}{\sqrt{K^2 - a^2y^2}} = dx$$

o, integrando

$$\frac{1}{a}\int \frac{\frac{a\,dy}{K}}{\sqrt{1 - \frac{a^2y^2}{K^2}}} = x + C$$

$$\frac{1}{a}\operatorname{arc\,sen}\frac{ay}{K} = x + C$$

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{ay}{K} = ax + aC = ax + \varphi$$

$$\frac{ay}{K} = \operatorname{sen}(ax + \varphi)$$

$$y = \frac{K}{a}\cdot \operatorname{sen}(ax + \varphi).$$

Se obtiene una función sinusoidal, en que las dos constantes son K y φ.

Tal es el resultado general de la integración de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$$

en la que el término $-a^2$ es, evidentemente, negativo.

Si se tuviera la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +a^2y$$

se obtendría, haciendo los cálculos como antes:

$$ax = \text{Log}\,(y + \sqrt{y^2 + C_1}) + C_2.$$

3. 6. Primera aplicación. — *Cálculo del período de un circuito oscilante en Radio.*

Se sabe que un circuito oscilante o acorde, está formado por una bobina conectada con un condensador. Llamemos C la capacidad del condensador y L la inductancia de la bobina. El condensador, cargado, se descarga en la bobina (fig. 19).

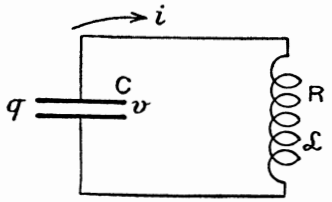


FIG. 19

— Coloquémonos en un instante cualquiera de la descarga y sean:

i la intensidad de la corriente en el momento dado,

q la carga eléctrica que existe en este momento en el condensador,

$v = \frac{q}{C}$ la diferencia de potencial entre los bornes del condensador en este instante.

Durante un tiempo dt, i varía en di, el flujo en la bobina varía en $d\Phi$, y se sabe (Véase el Tomo II) que la fuerza electromotriz que resulta es (en voltios)

$$e = -L\frac{di}{dt}$$

La ley de KIRCHHOFF da entonces

$$i = \frac{v + e}{R}$$

Se obtiene

$$Ri = v - L\frac{di}{dt}.$$

Haremos algo después un estudio completo de esta ecuación, pero por el momento, realicemos un estudio simplificado, suponiendo R = 0 (muy a menudo se puede, en efecto, despreciar R): quedando entonces

$$v = \mathrm{L}\frac{di}{dt}.$$

Por otra parte, durante el tiempo dt, sale del condensador una carga dq y se tiene

$$dq = -i\,dt$$

con el signo —, porque, disminuyendo la carga q, su diferencia dq debe ser negativa. Se obtiene

$$i = -\frac{dq}{dt} \qquad \text{y} \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$$

Se tendrá, por consiguiente

$$v = \frac{q}{\mathrm{C}} = -\mathrm{L}\frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{q}{\mathrm{LC}} = -a^2q} \qquad \left(\text{con } a^2 = \frac{1}{\mathrm{LC}}\right)$$

es, por consiguiente, una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y).$$

Resolución. — Multipliquemos los dos miembros por $2\frac{dq}{dt}\,dt$:

$$2\frac{dq}{dt}\frac{d^2q}{dt^2}\,dt = -2a^2q\frac{dq}{dt}\,dt = -2a^2q\,dq,$$

$$d\left[\left(\frac{dq}{dt}\right)^2\right] = -2a^2q\,dq.$$

Integremos

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = -a^2q^2 + \mathrm{K}^2$$

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\mathrm{K}^2 - a^2q^2}.$$

Separemos las variables

$$\frac{dq}{\sqrt{K^2 - a^2q^2}} = dt,$$

Integremos por segunda vez

$$\frac{1}{a}\int \frac{\frac{a\,dq}{K}}{\sqrt{1 - \frac{a^2q^2}{K^2}}} = t + K$$

$$\frac{1}{a}\operatorname{arc\,sen}\frac{aq}{K} = t + K$$

o, poniendo $aK' = \varphi$,

$$at + \varphi = \operatorname{arc\,sen}\frac{aq}{K}$$

$$\frac{aq}{K} = \operatorname{sen}(at + \varphi)$$

$$q = \frac{K}{a}\operatorname{sen}(at + \varphi).$$

La corriente i será

$$i = -\frac{dq}{dt} = -K\cos(at + \varphi)$$

y sustituyendo a por su valor $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ y $-K$ por la amplitud máxima I_0

$$i = I_0 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \varphi\right),$$

la corriente es, por consiguiente, sinusoidal, y se conoce bien que cuando la variable es el tiempo t, el coeficiente de t es la pulsación $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, donde T es el período.

Se tendrá, por consiguiente

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T}$$

de donde se obtiene

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}}$$

C en faradios,
L en henrys,
T en segundos

que es la fórmula de THOMSON, bien conocida.

Calcularemos después la fórmula exacta de T, teniendo en cuenta R.

NOTA. — Una ecuación de la forma

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = f(\theta)$$

se encuentra en el estudio de la propagación del calor, representando θ la temperatura y x una distancia.

3. 7. Segunda aplicación. — Cálculo del período de un péndulo (fig. 20).

— Sea un péndulo de peso P atado por un hilo a un eje O, y que se desvía de la vertical. Este péndulo va a oscilar y sus oscilaciones se amortiguarán a consecuencia de la resistencia del aire y los roces con el eje.

Despreciemos estas causas de amortiguación y calculemos el período T de las oscilaciones.

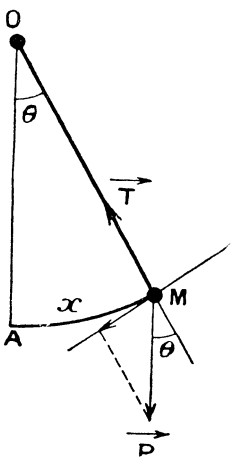


FIG. 20

— Coloquémonos en un instante cualquiera, por ejemplo, supongamos el péndulo en trance de elevarse y sea θ el ángulo que hace el hilo con la vertical (fig. 16).

Llamemos x al arco AM. Las fuerzas aplicadas al punto M son:

— su peso $\vec{P} = \vec{mg}$, fuerza vertical dirigida hacia abajo,

— la tensión del hilo $\vec{T}$ dirigida siguiendo la dirección del hilo M hacia O.

Proyectemos la ecuación fundamental $\vec{F} = \vec{m\gamma}$ sobre la tangente a la trayectoria, siendo nula la proyección de $\vec{T}$, se tiene:

$$m\gamma = -mg \operatorname{sen} \theta$$

(el signo — resulta de que la proyección del peso y θ son de signos contrarios) o sea:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \operatorname{sen} \theta.$$

Supongamos θ suficientemente pequeño ($\theta < 20°$) para lo que se puede, en una primera aproximación, confundir el seno y el arco $x (x = l \cdot \theta)$:

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta = \frac{x}{l},$$

lo que da

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \frac{x}{l} f(x),$$

e integrando esta ecuación, tendremos

$$x = f(t).$$

Multipliquemos los dos miembros por $2 \dfrac{dx}{dt} dt$:

$$2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} dt = -2 \frac{g}{l} x \frac{dx}{dt} dt = -\frac{2g}{l} x \, dx$$

Ahora bien, el miembro de la izquierda es la diferencial de $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$. Se escribirá, por consiguiente

$$d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = -2 \frac{g}{l} x \, dx.$$

Integremos

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{l} x^2 + K^2$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{K^2 - \frac{g}{l} x^2} \qquad \text{o} \qquad = \sqrt{\frac{g}{l} (a^2 - x^2)}.$$

Separemos las variables

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \, dt,$$

integremos

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^t dt$$

$$\left[\text{arc sen} \frac{x}{a}\right]_0^x = \sqrt{\frac{g}{l}} \left[t\right]_0^t$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\, t = \text{arc sen} \frac{x}{a},$$

$$\frac{x}{a} = \text{sen} \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

$$x = a \cdot \text{sen} \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

en donde a representa, evidentemente, la amplitud máxima. La elongación x varía pues sinusoidalmente y el coeficiente de t es también la pulsación Ω

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = \Omega = \frac{2\pi}{T},$$

y el período

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

es así independiente del peso P.

3. 8. Tercer tipo: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \dfrac{dy}{dx}\right)$ o $f\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

El segundo miembro es una función de x y de y' o bien de y' solamente.

Se pone

$$\frac{dy}{dx} = u \qquad \text{de donde} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$$

y se llega a una ecuación de primer orden, donde x y u son las incógnitas.

Se llega a una ecuación de este tipo, en el Tomo III (Cálculo Integral, párrafo 64), cuando hemos estudiado la ecuación de la catenaria, se ha obtenido:

$$ay'' = \sqrt{1 + y'^2}$$

lo que da

$$a\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{a}$$

e integrando

$$\text{Log}\,(u + \sqrt{1 + u^2}) = \frac{x}{a} + \text{K, etc.}$$

invitamos al lector a que vuelva al Tomo III, para la forma de obtener u.

Ejemplo. — Sea la ecuación

$$(1 + x^2)y'' + xy' = ax.$$

Puede escribirse

$$y'' = \frac{ax - xy'}{1 + x^2} = f(x, y')$$

que es, por consecuencia, del tipo estudiado. Se tendrá entonces

$$(1 + x^2)\frac{du}{dx} + ux = ax$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(a - u)x}{1 + x^4}$$

$$\frac{du}{a - u} = \frac{x\,dx}{1 + x^2}.$$

Integremos

$$-\text{Log}\,(a - u) = \frac{1}{2}\text{Log}\,(1 + x^2) + \text{Log C}$$

$$\text{Log}\frac{1}{a - u} = \text{Log C}\sqrt{1 + x^2}$$

$$\frac{1}{a - u} = \text{C}\sqrt{1 + x^2}$$

se obtiene fácilmente $u = \frac{dy}{dx}$; después se separan de nuevo las variables, e integrando, se obtiene y, que contendría aún dos constantes.

3. 9. Cuarto tipo: $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$.

El segundo miembro no contiene más que y e y', o bien y' solamente, pero no términos en x.

— Se pone

$$\frac{dy}{dx} = u,$$

pero se escribe

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u$$

y la ecuación toma la forma

$$u \frac{du}{dy} = f(y, u)$$

ecuación de primer orden en la que pueden separarse las variables.

Primer ejemplo. — Sea la ecuación

$$yy'' = 1 + y'^2.$$

— Es del tipo considerado antes. Se tendrá por consiguiente e integrando

$$y \cdot u \frac{du}{dy} = 1 + u^2$$

$$\frac{u\,du}{1 + u^2} = \frac{dy}{y},$$

e integrando

$$\frac{1}{2} \operatorname{Log} (1 + u^2) + \operatorname{Log} C = \operatorname{Log} y$$

$$y = C \sqrt{1 + u^2},$$

de donde obtiénese

$$u = \sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}} = dx.$$

Integremos de nuevo

$$C \cdot \text{Log} \left(\frac{y}{C} + \sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1} \right) = x + K.$$

Se conseguirá y de la forma que lo hemos hecho en el Tomo III en el estudio de la catenaria y también se obtendrá aquí la ecuación de una catenaria.

Segundo ejemplo. — Obtener la ecuación de las curvas de las que el radio de curvatura es constante e igual a R.

— Se tiene (Véase «Radio de curvatura», Tomo II):

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = R$$

$$Ry'' = (1 + y'^2)^{3/2}.$$

Pongamos

$$u = \frac{dy}{dx}$$

lo que da

$$R \frac{dy}{dx} = (1 + u^2)^{3/2}$$

$$\frac{dx}{R} = \frac{du}{(1 + u^2)^{3/2}}.$$

Integrando se obtiene

$$\frac{x - C}{R} = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}$$

de donde

$$u = \frac{x - C}{\sqrt{R^2 - (x - C)^2}} = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = \frac{(x - C)dx}{\sqrt{R^2 - (x - C)^2}}$$

$$y = \int \frac{(x - C)dx}{\sqrt{R^2 - (x - C)^2}} + C'$$

$$y - C' = -\sqrt{R^2 - (x - C)^2}$$

$$(y - C')^2 + (x - C)^2 = R^2,$$

esta ecuación representa una familia de círculos, como veremos en *Geometría Analítica* (Tomo VI), resultado que era evidente *a priori*.

CAPITULO IV

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN, COMPLETAS, LINEALES Y CON COEFICIENTES CONSTANTES

Solamente estudiaremos las ecuaciones lineales, es decir, aquellas en las que y'', y' e y son de primer grado, y en las que los coeficientes son constantes, ya que éstas son, con mucho, las más útiles y las más frecuentes en aplicaciones prácticas. Son de la forma

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = 0 \qquad \text{o} \qquad f(x).$$

donde x es la variable e y la función.

Para su resolución hay dos casos, según que el segundo miembro sea nulo, una constante, o una función de x.

Pero, en todos los casos, la solución de la ecuación deberá tener dos constantes.

ECUACIONES SIN SEGUNDO MIEMBRO

4. 1. $$\boxed{A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = 0}$$

— Si A o y'' fuese nulo, se tendría

$$B\frac{dy}{dx} Cy = 0,$$

ecuación ya estudiada y en la que pueden separarse las variables

$$\frac{dy}{y} = -\frac{C}{B}dx = r\,dx,$$

de donde integrando

$$y = Ke^{rx}.$$

Esto es, *por analogía con las ecuaciones de primer orden,* buscamos la obtención de la solución de la ecuación de segundo orden bajo una forma idéntica.

$$y = Ke^{rx}$$

en donde K y r son coeficientes desconocidos.

Se obtiene

$$y' = Kre^{rx} \quad \text{e} \quad y'' = Kr^2e^{rx},$$

Sustituyamos en la ecuación inicial

$$AKr^2e^{rx} + BKre^{rx} + CKe^{rx} = 0$$

o (ya que ni K ni e^{rx} son nulos)

$$\boxed{Ar^2 + Br + C = 0}$$

Esta ecuación se llama «*ecuación característica*»: se consigue *inmeditamente* partiendo de la ecuación diferencial, y sustituyendo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ por } r^2, \qquad \frac{dy}{dx} \text{ por } r, \qquad \text{e } y \text{ por } 1,$$

ya que en cada caso particular no se han repetido los cálculos anteriores.

Esta «ecuación característica» puede tener una o dos raíces reales o bien dos raíces imaginarias.

4. 2. Primer caso. — La ecuación característica tiene dos raíces reales. — Sean r_1 y r_2 estas raíces. Las expresiones

$$y_1 = K_1e^{r_1x} \quad \text{e} \quad y_2 = K_2e^{r_2x}$$

verifican evidentemente la ecuación diferencial, y se tendrá

$$Ay_1'' + By_1' + Cy_1 = 0$$

y

$$Ay_2'' + By_2' + Cy_2 = 0$$

sumemos miembro a miembro

$$A(y_1'' + y_2'') + B(y_1' + y_2') + C(y_1 + y_2) = 0.$$

Esta igualdad muestra que la función

$$\boxed{Y = y_1 + y_2 = K_1e^{r_1x} + K_2e^{r_2x}}$$

es una solución de la ecuación diferencial, y como contiene dos constantes, es la integral general buscada. Las constantes K_1 y K_2 se de-

terminan en cada caso particular por las condiciones iniciales o finales.

Las raíces de la ecuación característica

$$Ar^2 + Br + C = 0$$

son

$$r = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

así todo dependerá del signo de $B^2 - 4AC$.

Ejemplo. — Sea la ecuación

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

— La ecuación característica se escribe también

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

de la cual las raíces son + 2 y + 3. La solución general es, por consiguiente

$$Y = K_1 e^{2x} + K_2 e^{3x}.$$

4. 3. Segundo caso. — La ecuación característica tiene una sola raíz. — La raíz doble es

$$r = -\frac{B}{2A}$$

y la función

$$y = Ke^{rx}$$

es *una solución* de la ecuación diferencial, pero como no contiene más que una constante no es la integral general.

Para hallar la integral general Y, empleemos el método de LAGRANGE o *método de variación de las constantes,* es decir, diremos que la expresión $y = Ke^{rx}$ es la solución general *a condición de considerar* K, *no sólo como una constante, sino también como una función desconocida de* x, y que, además, pueda calcularse.

Derivemos y (que es un producto):

$$y' = K'e^{rx} + Kre^{rx} = e^{rx}(K' + Kr)$$
$$y'' = (K' + Kr)re^{rx} + e^{rx}(K'' + K'r)$$
$$= e^{rx}(K'' + 2K'r + Kr^2).$$

Sustituyamos estos valores en la ecuación diferencial

$$Ae^{rx}(K'' + 2K'r + Kr^2) + Be^{rx}(K' + Kr) + CKe^{rx} = 0$$

o, dividiendo por e^{rx}, y ordenando

$$AK'' + K'(2Ar + B) + K(Ar^2 + Br + C) = 0.$$

Ahora bien, siendo r raíz de la ecuación característica, el paréntesis de la derecha es nulo, y como r es, por otra parte, raíz doble, se tiene

$$2Ar + B = 0. \quad \left(\text{ya que } r = -\frac{B}{2A}\right)$$

Queda entonces

$$AK'' = 0 \qquad \text{o} \qquad K'' = 0,$$

la primera derivada es, por consiguiente, una constante, que denominaremos m

$$K' = m = \frac{dK}{dx}$$

de donde

$$K = mx + p.$$

Sustituyamos en y, y se obtendrá así la solución general con dos constantes m y p

$$\boxed{Y = e^{rx}(mx + p)}$$

Ejemplo. — Sea la ecuación

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

— La ecuación característica es

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

$$(r - 3)^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad r = 3.$$

La solución es, por consiguiente,

$$Y = e^{3x}(mx + p).$$

4. 4. Tercer caso. — La ecuación característica tiene dos raíces imaginarias. — $B^2 - 4AC$ es negativa y se tienen dos raíces negativas conjugadas, que escribiremos en la forma

$$r_1 = -\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC} = \alpha + j\beta$$

$$r_2 = -\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC} = \alpha - j\beta.$$

La solución general es, por consiguiente

$$Y = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x} = K_1 e^{(\alpha+j\beta)x} + K_2 e^{(\alpha-j\beta)x}$$
$$= e^{\alpha x}(K_1 e^{j\beta x} + K_2 e^{-j\beta x})$$

en donde K_1 y K_2 son constantes cualesquiera.

Pero gracias a las fórmulas de EULER (Véase el Tomo II):

$$e^{j\beta x} = \cos \beta x + j \operatorname{sen} \beta x$$
$$e^{-j\beta x} = \cos \beta x - j \operatorname{sen} \beta x$$

podemos escribir

$$Y = e^{\alpha x}(K_1 \cos \beta x + K_1 j \operatorname{sen} \beta x + K_2 \cos \beta x - K_2 j \operatorname{sen} \beta x)$$
$$= e^{\alpha x}[(K_1 + K_2)\cos \beta x + (K_1 - K_2) j \operatorname{sen} \beta x].$$

Podemos hacer que desaparezca j y dar a Y una forma real, tomando para K_1 y K_2, *que son cualesquiera,* dos imaginarias conjugadas

$$K_1 = a + jb \qquad \text{y} \qquad K_2 = a - jb$$

de donde

$$K_1 + K_2 = 2a \qquad \text{y} \qquad K_1 - K_2 = 2jb,$$

así se obtendrá

$$Y = e^{\alpha x}(2a \cos \beta x + 2jb \cdot j \operatorname{sen} \beta x)$$

y, finalmente, escribiremos

$$\boxed{Y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)}$$

o incluso, según una conocida equivalencia trigonométrica

$$\boxed{Y = Me^{\alpha x} \operatorname{sen} (\beta x - \varphi)}$$

en donde las dos constantes son M y φ.

La solución es real y sinusoidal.

Se observa que la parte real de las raíces de la ecuación característica es el coeficiente de x en la exponencial, mientras que el coeficiente de j de estas raíces es el de x en el seno.

Ejemplo. — Sea la ecuación

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

La ecuación característica es

$$r^2 - 4r + 13 = 0 \qquad (\text{con } \Delta = 16 - 52 = -36)$$

de donde

$$\left| \begin{array}{l} r_1 = \dfrac{4 + \sqrt{-36}}{2} = 2 + 3j = \alpha + j\beta \\ r_2 = \dfrac{4 - \sqrt{-36}}{2} = 2 - 3j = \alpha - j\beta, \end{array} \right.$$

la solución general es, por lo mismo

$$Y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x)$$

o incluso

$$Y = Me^{2x} \operatorname{sen} (3x - \varphi)$$

estando determinadas en cada caso particular las constantes C_1 y C_2, o M y φ, por las condiciones iniciales o finales.

NOTA. — Si por azar $\alpha = 0$, es decir, $B = 0$, no hay términos en y' en la ecuación diferencial, y queda

$$Y = M \operatorname{sen} (\beta x - \varphi).$$

Es, por consiguiente, un movimiento sinusoidal puro de amplitud constante. Mientras que, en el caso general, cuando α no es nulo, la solución Y es también periódica, pero de amplitud variable:

1.° Si $\alpha < 0$, las amplitudes sinusoidales decrecen exponencialmente, y este es el caso, en electricidad, de la descarga oscilante de un condensador en una inductancia, que estudiaremos después con detalle, se tiene una sinusoide amortiguada.

Es también el caso de un cuadro móvil de aparato de medida eléctrico, que oscila con la amortiguación. Y, en fin, es el caso general de todo sistema vibrante (resortes, etc.), en el cual se dé un frenado o amortiguación debido a una causa cualquiera (aire, frotamientos, etc.).

2.° Si $\alpha > 0$, las amplitudes sinusoidales crecen exponencialmente, este es el caso en radio del montaje amplificador a *super-reacción,* que por este hecho, da un poder amplificador considerable.

En todos estos fenómenos la variable x representa un ángulo θ o bien el tiempo t.

4. 5. Caso particular. — El segundo miembro de la ecuación diferencial es una constante D

$$\boxed{Ay'' + By' + Cy = D}$$

— Este caso se refiere a los anteriores.

Se opera, además, como para las ecuaciones de primer orden, pasando D a la izquierda y sumándolo al término en y:

$$Ay'' + By' + (Cy - D) = 0.$$

Se pone

$$Cy - D = u \qquad \text{de donde} \qquad Cy' = u'.$$

La ecuación diferencial conviértese entonces en

$$\frac{A}{C}u'' + \frac{B}{C}u' + u = 0$$

y se vuelve a una ecuación sin segundo miembro, que se integra para obtener u, de donde se deduce y.

Ejemplo. — Sea la ecuación

$$y'' - 4y' + 2y = 4.$$

— Se escribirá

$$y'' - 4y' + (2y - 4) = 0,$$

y se pone

$$2y - 4 = u \qquad \text{de donde} \qquad \left| \begin{array}{l} 2y' = u' \\ 2y'' = u''. \end{array} \right.$$

y

se tendrá, por ello,

$$\frac{1}{2}u'' - 4\frac{u'}{2} + u = 0$$

$$u'' - 4u' + 2u = 0$$

ecuación sin segundo miembro que se sabe resolver y que dará u.

De ahí la solución

$$Y = \frac{u + 4}{2}.$$

ECUACIONES CON SEGUNDO MIEMBRO VARIABLE

4. 6.

$$\boxed{A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = f(x)}$$

en donde se trata de un segundo miembro función de x solamente, y no de y.

Utilízase el teorema fundamental siguiente.

Teorema. — *Para hallar la integral general de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, y segundo miembro variable, basta calcular la integral general de la ecuación sin segundo miembro, y añadirle una solución particular de la ecuación con segundo miembro.*

— Supongamos que conociésemos una solución particular y_2 de la ecuación con segundo miembro (la que vamos a ver después como se obtiene), y tendremos

$$Ay_2'' + By_2' + Cy_2 = f(x).$$

llamemos Y a la solución general de la ecuación completa, y pongamos

$$Y = y_1 + y_2$$

determinando y_1, para que la suma $y_1 + y_2$ sea la solución general de la ecuación completa.

Si ello se cumple, tendremos

$$A(y_1'' + y_2'') + B(y_1' + y_2') + C(y_1 + y_2) = f(x)$$

o incluso

$$(Ay_2'' + By_2' + Cy_2) + (Ay_1'' + By_1' + Cy_1) = f(x).$$

Ahora bien, en la ecuación (1) el primer paréntesis es igual a $f(x)$, lo que da

$$f(x) + (Ay_1'' + By_1' + Cy_1) = f(x)$$

$$Ay_1'' + By_1' + Cy_1 = 0$$

lo que significa que y_1 es la solución de la ecuación sin segundo miembro. c.q.d.

Resumiendo, la solución general de la ecuación con segundo miembro es

$$\boxed{Y = y_1 + y_2}$$

Se hace necesario conocer los medios para obtener una solución particular de la ecuación diferencial con segundo miembro, sea cual sea la forma de este segundo miembro.

BUSQUEDA DE LAS SOLUCIONES PARTICULARES

Buscaremos las soluciones particulares empleando el método de los coeficientes indeterminados, en los casos siguientes:

1.° el segundo miembro es un polinomio en x.

2.° el segundo miembro es una exponencial.

3.° el segundo miembro es el producto de una exponencial por un polinomio en x.

4.° el segundo miembro es una suma de seno y coseno.

En principio, y con carácter general, la solución particular será una expresión de la misma forma que el segundo miembro.

4. 7. Primer caso. — El segundo miembro es un polinomio en x. — Supongamos, para fijar ideas, que sea un polinomio de segundo grado

$$Ay'' + By' + Cy = ax^2 + bx + c.$$

Veremos que, en general, una solución particular será un polinomio del mismo grado.

Se determinarán los coeficientes de este polinomio por el método de los coeficientes indeterminados, tomando para y_2 una expresión completa de segundo grado, es decir

$$y_2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

de donde

$$y_2' = 2\alpha x + \beta \qquad \text{e} \qquad y_2'' = 2\alpha.$$

Será necesario, por consiguiente, que se llegue a la *identidad* siguiente, sea cual sea x:

$$A \cdot 2\alpha + B(2\alpha x + \beta) + C(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \equiv ax^2 + bc + c.$$

Identifiquemos

$$C\alpha = a \qquad \text{de donde} \qquad \alpha = \frac{a}{C}$$

$$C\beta + 2\alpha B = b$$
$$2\alpha A + B\beta + C\gamma = c.$$

Se hace resaltar que β y γ tendrán, lo mismo que α, el término C en el denominador. Será preciso, por consiguiente, que C sea distinto de cero, es decir, que la ecuación diferencial estudiada tenga un término en y,

Así se habrán calculado a, b y c y, por consiguiente, se conocerá y_2.

Si $C = 0$, es decir, si la ecuación diferencial no tiene término en y, es imposible la identificación. En este caso, basta tomar para y_2 una solución que sea x veces mayor

$$y_2 = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Se verifica el mismo cálculo que antes, derivando, y se verá fácilmente, que la identificación es posible, de ahí la regla siguiente:

REGLA: *Si* $C \neq 0$, *una solución particular es un polinomio del mismo grado que el segundo miembro,*

si $C = 0$, *una solución particular es* x *veces un polinomio del mismo grado.*

Primer ejemplo. — Sea la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3.$$

1.°) La ecuación sin segundo miembro

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

tiene como ecuación característica

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

de la cual las raíces son 1 y 2, siendo, por consiguiente, la solución

$$y_1 = K_1 e^x + K_2 e^{2x}.$$

2.°) Una solución particular de la ecuación con segundo miembro será de la forma

$$y_2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

de donde

$$y_2' = 2\alpha x + \beta \qquad \text{e} \qquad y_2'' = 2\alpha.$$

Sustituyamos en la ecuación diferencial completa

$$2\alpha - 3(2\alpha x + \beta) + 2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \equiv 2x^2 - 5x + 3$$

de donde, identificando

$$\left|\begin{array}{ll} 2\alpha = 2 & \alpha = 1 \\ -6\alpha + 2\beta = -5 & \beta = \dfrac{1}{2} \\ 2\alpha - 3\beta + 2\gamma = 3 & \gamma = \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

e

$$y_2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}.$$

Por consiguiente, la solución general será

$$Y = y_1 + y_2 = K_1 e^x + K_2 e^{2x} + x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}.$$

Segundo ejemplo. — Sea la ecuación

$$y'' - 4y' = x^2 - 2x.$$

1.°) La ecuación sin segundo miembro $y'' - 4y'$ tiene como ecuación característica

$$r^2 - 4r = 0 \qquad \text{de donde} \qquad \left|\begin{array}{l} r_1 = 0 \\ r_2 = 4 \end{array}\right.$$

por consiguiente, la ecuación es

$$y_1 = K_1 + K_2 e^{4x}.$$

2.°) No existiendo término en y en la ecuación diferencial, una solución particular de la ecuación con segundo miembro será de la forma

$$y_2 = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx,$$

de donde

$$y_2' = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$y_2'' = 6ax + 2b.$$

Sustituyamos en la ecuación completa

$$(6ax + 2b) - 4(3ax^2 + 2bx + c) \equiv x^2 - 2x,$$

y se ve que la identificación es posible:

$$\left|\begin{array}{ll} -12a = 1 & a = -\dfrac{1}{12} \\ 6a - 8b = -2 & b = \dfrac{3}{16} \\ 2b - 4c = 0 & c = \dfrac{3}{32} \end{array}\right.$$

Por consiguiente, tendremos

$$y_2 = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{32}x,$$

y, por último

$$Y = y_1 + y_2 = K_1 + K_2e^{4x} - \frac{x^3}{16} + \frac{3x^2}{16} + \frac{3x}{32}.$$

4. 8. Segundo caso. — El segundo miembro es una exponencial.

$$Ay'' + By' + Cy = De^{\alpha x}.$$

— Se tomará como solución particular una expresión de la misma forma que el segundo miembro, es decir

$$\boxed{y_2 = Ke^{\alpha x}}$$

donde K es una constante desconocida, y α, como es natural, el mismo exponente que en el segundo miembro de la ecuación diferencial. Vamos a ver que puede determinarse el valor de K. Derivemos y_2

$$y_2' = K\alpha e^{\alpha x} \quad \text{e} \quad y_2'' = K\alpha^2 e^{\alpha x}.$$

Sustituyamos en la ecuación diferencial

$$AK\alpha^2 e^{\alpha x} + BK\alpha e^{\alpha x} + CKe^{\alpha x} = De^{\alpha x}$$

$$K(A\alpha^2 + B\alpha + C) = D$$

$$K = \frac{D}{A\alpha^2 + B\alpha + C} \qquad (1)$$

lo que supone denominador no nulo.

Ejemplo. — *Sea la ecuación*

$$y'' - 5y' + 6y = 3e^{4x}.$$

— Tratamos de buscar una solución particular de la ecuación con segundo miembro, poniendo

$$y_2 = Ke^{4x}$$

de donde

$$y_2' = 4Ke^{4x} \qquad \text{e} \qquad y_2'' = 16Ke^{4x}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación completa, se tendrá

$$16Ke^{4x} - 5 \cdot 4Ke^{4x} + 6Ke^{4x} = 3e^{4x}$$

de donde

$$K = \frac{3}{2}$$

e

$$y_2 = \frac{3}{2} e^{4x}$$

Por consiguiente, la solución general es

$$Y = K_1 e^{2x} + K_2 e^{3x} + \frac{3}{2} e^{4x}$$

Casos particulares. — Hay dos:

1.° Puede llegarse a que α sea igual a una de las raíces de la ecuación característica, es decir, que

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0,$$

el denominador de la ecuación (1) es nulo y no puede calcularse K.

Se utiliza entonces el método de variación de las constantes que ya hemos empleado frecuentemente, es decir, que en la expresión

$$y_2 = Ke^{\alpha x}$$

vamos a considerar K como una función desconocida de x.

Derivemos

$$y_2' = e^{\alpha x}K' + K\alpha e^{\alpha x} = e^{\alpha x}(K' + K\alpha)$$
$$y_2'' = (K' + K\alpha)\alpha e^{\alpha x} + e^{\alpha x}(K'' + K'\alpha)$$
$$= e^{\alpha x}(K'' + 2K'\alpha + K\alpha^2)$$

Sustituyamos en la ecuación diferencial, y, tras de dividir por $e^{\alpha x}$, queda

$$A(K'' + 2K'\alpha + K\alpha^2) + B(K' + K\alpha) + CK = D$$
$$AK'' + K'(2A\alpha + B) + K(A\alpha^2 + B\alpha + C) = D, \qquad (2)$$

ahora bien, siendo α raíz de la ecuación característica, el segundo paréntesis es nulo, y queda

$$AK'' + K'(2A\alpha + B) = D$$

ecuación de segundo orden en la cual falta el término en K, y por lo tanto la solución es x veces mayor, como se ha visto antes, de donde

$$K = M \cdot x \qquad (M \text{ es una constante}),$$

lo que da finalmente

$$\boxed{y_2 = Mxe^{\alpha x}}$$

2.° Siendo α raíz doble de la ecuación característica, se tiene

$$2A\alpha + B = 0$$

y los dos paréntesis de la ecuación (2) son nulos. Entonces queda

$$AK'' = D$$

de donde

$$K' = mx \qquad \text{y} \qquad K = \frac{mx^2}{2} = px^2$$

Así la solución particular será x^2 veces mayor

$$\boxed{y_2 = px^2e^{\alpha x}}$$

Es inútil agregar constantes a mx y px^2, ya que estos términos se añadirán a y_1.

Ejemplos. — 1.° *Sea la ecuación*

$$y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x}.$$

La solución y_1 de la ecuación sin segundo miembro es

$$y_1 = K_1e^{2x} + K_2e^{3x}$$

Ahora bien ,en la exponencial e^{2x}, 2 es justamente raíz de la ecuación característica. Tomaremos, por consiguiente, como solución particular el valor siguiente

$$y_2 = Kxe^{2x}.$$

Derivemos

$$y_2' = e^{2x}K + Kx \cdot 2e^{2x} = Ke^{2x}(1 + 2x)$$
$$y_2'' = (1 + 2x)2Ke^{2x} + Ke^{2x} \cdot 2 = 2Ke^{2x}(2 + 2x).$$

Sustituyamos en la ecuación diferencial, y después de dividir por e^{2x}, queda

$$2K(2 + 2x) - 5K(1 + 2x) + 6Kx = 5,$$

Se observa que los términos en x desaparecen, como deben, ya que no hay en el miembro de la derecha. Queda

$$K = -5.$$
$$y_2 = -5xe^{2x}.$$

Así se tendrá como solución general

$$Y = K_1e^{2x} + K_2e^{3x} - 5xe^{2x}$$
$$= e^{2x}(K_1 - 5x) + K_2e^{3x}.$$

2.° *Sea la ecuación*

$$y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x}$$

— La ecuación característica

$$r^2 - 6r + 9 = 0 = (r - 3)^2$$

teniendo una raíz doble, se tomará como solución particular

$$y_2 = Kx^2e^{3x}$$

siendo entonces posible la identificación, lo que el lector puede comprobar.

NOTA. — Si el segundo miembro de la ecuación diferencial fuese una suma de exponenciales, han de tratarse separadamente cada una de ellas como se viene haciendo, y se sumarán los resultados obtenidos.

4. 9. Tercer caso. El segundo miembro es el producto de una exponencial por un polinomio en x

$$Ay'' + By' + Cy = e^{\alpha x} \cdot P(x).$$

— Pondremos, como solución particular

$$y_2 = ze^{\alpha x}$$

donde z es una función desconocida de x.

Derivemos

$$y_2' = e^{\alpha x}z' + z\alpha e^{\alpha x} = e^{\alpha x}(z' + \alpha z)$$
$$y_2'' = e^{\alpha x}(z'' + 2\alpha z' + \alpha^2 z).$$

Sustituyamos en la ecuación, después de dividir por $e^{\alpha x}$, y queda

$$A(z'' + 2\alpha z' + \alpha^2 z) + B(z' + \alpha z) + Cz = P(x)$$
$$Az'' + z'(2\alpha A + B) + z(A\alpha^2 + B\alpha + C) = P(x). \qquad (3)$$

Así se obtiene una ecuación diferencial completa, de segundo orden, y de la cual el segundo miembro es un polinomio en x. Por consiguiente, la solución z será un polinomio en x, del mismo grado, en general

$$z = \varphi(x).$$

Se deriva, se sustituye en la ecuación completa, e identificando, calcúlanse los coeficientes de este polinomio. Así se reduce al primer caso.

Si α es raíz de la ecuación característica, el segundo paréntesis de la ecuación (3) es nulo, y se tomará para z una expresión x veces mayor.

— Si α es raíz doble, los dos paréntesis de la ecuación (3) son nulos, y se tomará para z una expresión x^2 veces mayor.

Primer ejemplo. — Sea la ecuación

$$y'' - 4y' + 3y = (3x^2 + 1)e^{3x}.$$

— La ecuación característica $r^2 - 4r + 3 = 0$ teniendo como raíces 3 y 1, y siendo 3 justamente el exponente de e, tomaremos como solución particular de la ecuación con segundo miembro la expresión

$$y_2 = ze^{3x}$$

en donde z es una función desconocida.

Derivemos:

$$y_2' = e^{3x}z' + 3ze^{3x} = e^{3x}(z' + 3z)$$
$$y_2'' = e^{3x}(z'' + 6z' + 9z).$$

Sustituyamos en la ecuación diferencial, dividiendo por e^{3x}

$$(z'' + 6z' + 9z) - 4(z' + 3z) + 3z = 3x^2 + 1$$
$$z'' + 2z' = 3x^2 + 1, \qquad (1)$$

la ecuación incompleta de la que la solución particular será de tercer grado, ya que no hay términos en z

$$z = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x \qquad (2)$$

de donde

$$z' = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$
$$z'' = 6\alpha x + 2\beta,$$

lo que da, sustituyendo en la ecuación (1),

$$z'' + 2z' = (6\alpha x + 2\beta) + 2(3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) \equiv 3x^2 + 1,$$

identifiquemos

$$\left|\begin{array}{r} 6\alpha = 3 \\ 6\alpha + 4\beta = 0 \\ 2\beta + 2\gamma = 1 \end{array}\right| \quad \text{de donde} \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \beta = -\dfrac{3}{4} \\ \gamma = \dfrac{5}{4}. \end{array}\right.$$

Por consiguiente, tendremos

$$y_2 = e^{3x}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{4}x\right),$$

y la solución general será

$$Y = K_1e^x + K_2e^{3x} + e^{3x}\left(\frac{x^3}{2} - 3\frac{x^2}{4} + \frac{5}{4}x\right).$$

Así se ve que el polinomio es x veces un polinomio de segundo grado. Por fin, se observa que en la ecuación (2) es inútil sumar un término constante, ya que éste daría una constante en el paréntesis anterior a Y, y este término multiplicado por e^{3x} se sumaría al K_2e^{3x} lo que vuelve a cambiar el valor de la constante K_2.

Segundo ejemplo. — *Sea la ecuación*

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(x + 1).$$

Teniendo una raíz doble +3 la ecuación característica $r^2 - 6r + 9 = 0$, que es justamente el exponente en e^{3x}, tomaremos como solución particular la misma exponencial multiplicada por un polinomio que será x^2 veces de primer grado, sea $y_2 = e^{3x}x^2(ax + b)$.

Pero para evitar el cálculo de a y b es más sencillo, a fin de simplificar los cálculos, poner

$$y_2 = ze^{3x}$$

de donde

$$y_2' = e^{3x}(3z + z')$$

e

$$y_2'' = e^{3x}(9z + 6z' + z'').$$

Dividiendo por e^{3x}, se tendrá por consiguiente

$$(9z + 6z' + z'') - 6(3z + z') + 9z = x + 1.$$

Queda

$$z'' = x + 1$$

de donde, integrando (es inútil aquí sumar constantes):

$$z' = \frac{x^2}{2} + x$$

$$z = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2},$$

lo que dará

$$y_2 = e^{3x}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right).$$

La solución general será, finalmente

$$Y = e^{3x}(K_1x + K_2) + e^{3x}x^2\left(\frac{x}{6} + \frac{1}{2}\right).$$

4.10. Cuarto caso. El segundo miembro es de la forma

$$M \operatorname{sen} px + N \cos px.$$

— Pongamos, *a priori*, como solución particular una expresión de la misma forma, sea

$$y_2 = \alpha \operatorname{sen} px + \beta \cos px$$

donde α y β son coeficientes numéricos desconocidos, siendo, evidentemente, el mismo el ángulo px.

Se tomará y_2 bajo esta forma, con seno y coseno, incluso si el segundo miembro de la ecuación no contiene más que seno o coseno.

Derivemos

$$y_2' = p\alpha \cos px - p\beta \operatorname{sen} px$$
$$y_2'' = -\alpha p^2 \operatorname{sen} px - \beta p^2 \cos px.$$

Sustituyamos en la ecuación diferencial inicial

$$Ay'' + By' + Cy = M \operatorname{sen} px + N \cos px,$$

sea

$$A(-\alpha p^2 \operatorname{sen} px - \beta p^2 \cos px) + B(p\alpha \cos px - p\beta \operatorname{sen} px) + C(\alpha \operatorname{sen} px + \beta \cos px) \equiv M \operatorname{sen} px + N \cos px$$

Identifiquemos, es decir, igualemos los coeficientes de senos y cosenos

$$\left| \begin{array}{l} -\alpha p^2 A - \beta pB + C\alpha = M \\ -\beta p^2 A + \alpha pB + \beta C = N \end{array} \right.$$

o

$$\left| \begin{array}{l} \alpha(C - Ap^2) - \beta pB = M \\ \alpha pB + \beta(C - Ap^2) = N \end{array} \right.$$

lo que resulta dos ecuaciones con dos incógnitas α y β.

El denominador del determinante es

$$(C - Ap^2)^2 + p^2B^2,$$

si se supone por un momento que no es nulo, podrá calcularse α y β.

Ejemplo. — Sea la ecuación

$$y'' - 2y' + \frac{3}{4}y = \operatorname{sen} x.$$

— Pongamos como solución particular

$$y_2 = \alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x$$

de donde

$$y_2' = \alpha \cos x - \beta \operatorname{sen} x$$
$$y_2'' = -\alpha \operatorname{sen} x - \beta \cos x$$

Sustituyamos en la ecuación diferencial

$$(-\ \operatorname{sen} x - \beta \cos x) - 2(\alpha \cos x - \beta \operatorname{sen} x) + \\ + \frac{3}{4}(\alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x) \equiv \operatorname{sen} x.$$

Identifiquemos

para los senos:

$$-\alpha + 2\beta + \frac{3}{4}\alpha = 1$$

para los cosenos:

$$-\beta - 2\alpha + \frac{3}{4}\beta = 0,$$

se obtiene

$$\alpha = -\frac{4}{65} \qquad \beta = \frac{32}{65}.$$

La solución particular será, por consiguiente

$$y_2 = -\frac{4}{65}\operatorname{sen} x + \frac{32}{65}\cos x$$

y se observa que a pesar de que el segundo miembro de la ecuación diferencial no contiene término en coseno, la solución particular contiene uno.

Caso particular. — Podría llegarse a

$$(C - Ap^2)^2 + p^2B^2 = 0$$

lo que no es posible salvo que se dé a la vez

$$\begin{cases} C = Ap^2 \\ B = 0, \end{cases}$$

$B = 0$ quiere decir que no hay término en y' en la ecuación diferencial; y, en el caso en que estas dos condiciones se diesen al mismo tiempo, el cálculo de α y β es imposible. En este caso la solución particular será x veces mayor, es decir

$$y_2 = x(\alpha \operatorname{sen} px + \beta \cos px).$$

Los cálculos son un poco largos, pero derivando y después identificando hay términos que desaparecerían (todos los que contienen x) y es posible el cálculo de α y β.

Ejemplo. — Sea la ecuación

$$y'' + y = \operatorname{sen} x.$$

— La ecuación característica $r^2 + 1 = 0$ tiene por raíz $\pm j$. La solución de la ecuación sin segundo miembro es

$$y_1 = K_1 \cos x + K_2 \operatorname{sen} x.$$

Por otra parte, $B = 0$ y $C = Ap^2$, por consiguiente, una solución particular será de la forma

$$y_2 = x(\alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x),$$

Se obtiene, haciendo los cálculos como antes: $\alpha = 0$ y $\beta = -\frac{1}{2}$.

Concluyendo, la solución general es

$$Y = K_1 \cos x + K_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x \cdot \cos x.$$

4.11. Notas varias. — *Nota I.* — Si el segundo miembro fuese de la forma $M \operatorname{sen}^2 x$ o bien $N \cos^2 x$ se tomaría como solución particular una expresión completa de segundo grado en seno y coseno, es decir

$$y_2 = \alpha \operatorname{sen}^2 x + \beta \cos^2 x + \gamma \operatorname{sen} x \cos x,$$

que se identificaría igualando separadamente los coeficientes de $\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen} x$. Así se obtendría α, y γ, lo que no presenta dificultad alguna.

Nota II. — Si el segundo miembro fuese de la forma

$$(M \cos px + N \operatorname{sen} px)e^{nx}$$

se tomaría como solución particular

$$y_2 = (\alpha \cos px + \beta \operatorname{sen} px)e^{nx}$$

y se operaría como antes.

Nota III. — El caso de un segundo miembro de la forma $M \operatorname{sen} px + N \cos px$ se convierte al caso de una exponencial gracias a las fórmulas de EULER

$$\operatorname{sen} px = \frac{e^{jpx} - e^{-jpx}}{2j} \quad \text{y} \quad \cos px = \frac{e^{jxp} + e^{-jpx}}{2},$$

y el segundo miembro se convertiría en

$$\frac{e^{jxp}}{2}\left(\frac{M}{j}+N\right)+\frac{e^{-jpx}}{2}\left(-\frac{M}{j}+N\right),$$

que se trataría como en el caso de exponenciales simples, siendo un coeficiente cualquiera cada uno de estos paréntesis.

Nota IV. — Naturalmente los métodos empleados para las ecuaciones diferenciales completas pueden aplicarse, frecuentemente con ventaja, para las ecuaciones incompletas.

— Así, por ejemplo, sea la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2}=4x=0.$$

La ecuación característica de $r^2+4=0$, de donde

$$r=\pm 2j=\alpha\pm j\beta \qquad (\text{con } \alpha=0)$$

la solución es, por consiguiente (ya que $e^{\alpha t}$ se reduce a 1):

$$x=K_1\cos 2t+K_2\operatorname{sen}2t=M\operatorname{sen}(2t-\varphi),$$

se trata pues de un movimiento periódico del cual la pulsación Ω es el coeficiente de t y el período T es

$$T=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{2\pi}{2}=3{,}14 \text{ segundos.}$$

— Vamos a aplicar ahora las ecuaciones diferenciales de segundo orden a diferentes problemas de Física, Electricidad, Acústica, Radio, Mecánica y Resistencia de materiales, esforzándonos en explicar claramente y con detalles, *su traducción por su ecuación* y *la resolución de la misma*.

CAPITULO V

PROBLEMAS DE APLICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

5. 1. Problema I. Trayectoria de un proyectil. — *Sea un proyectil de peso* P *lanzado con un ángulo* α *sobre el plano vertical. Estudiemos la forma de su trayectoria, despreciando la resistencia del aire.*

— A causa de la dirección de la velocidad inicial V_0, el proyectil tiende a elevarse pero como consecuencia de la fuerza vertical de la gravedad $P = mg$, la trayectoria se curva hacia el suelo. Coloquémonos en un punto M de la trayectoria, al cabo del tiempo t después del lanzamiento, y sean x e y las coordenadas de ese punto (fig. 21).

Siendo la gravedad la sola fuerza aplicada al proyectil, proyectemos éste sobre los dos ejes aplicando la fórmula fundamental $F = ma$:

sobre el eje horizontal

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

sobre el eje vertical

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -P = -mg$$

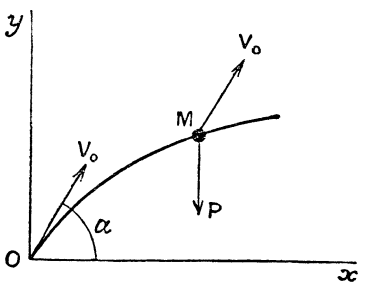


FIG. 21

con el signo —, ya que la fuerza P actúa en sentido contrario al positivo de y. Resulta

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \text{de donde} \qquad \frac{dx}{dt} = c^{te} = V_0 \cos\alpha,$$

y

$$x = V_0 \cos\alpha \cdot t + C,$$

ahora bien, para

$$t = 0, \quad x = 0 \quad \text{por lo cual} \quad C = 0,$$

y

$$x = V_0 t \cos \alpha. \tag{1}$$

También

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \qquad \text{de donde} \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + c^{te}$$

ahora bien, para $t = 0$, $\frac{dy}{dt}$ que es la proyección vertical de la velocidad V_0 es igual a $V_0 \operatorname{sen} \alpha$, de donde

$$V_0 \operatorname{sen} \alpha = 0 + C$$

lo que da

$$\frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \operatorname{sen} \alpha,$$

e integrando

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + V_0 t \operatorname{sen} \alpha + K$$

y como, para $t = 0$, $y = 0$, queda $K = 0$, de donde

$$y = -\frac{1}{2} gt^2 + V_0 t \operatorname{sen} \alpha. \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) constituyen las ecuaciones paramétricas de la trayectoria

$$x = f(t) \qquad \text{e} \qquad y = \varphi(t),$$

y, para tener la ecuación en la forma $y = f(x)$, eliminemos t. De la ecuación (1) obtenemos

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha},$$

sustituyamos en la ecuación (2), lo que da

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + V_0 \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot x}{V_0 \cos \alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2} \frac{gx^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha = -ax^2 + bx,$$

que es un trinomio de segundo grado que representa *una parábola de la cual el eje es paralelo a Oy, pasando por un máximo.* Señalemos que en el Tomo II hemos hecho una aplicación numérica de este problema.

5.2. Problema II. Problema del resorte vertical. — *Un peso* P *es atraído por un punto fijo* A *proporcionalmente a la distancia. Cuando este peso se coloca en* O *a una distancia* $OA = a$ *y debajo del punto* A, *la atracción de* A *sobre el peso* P *es igual y opuesta al peso* P. *Hallar la ecuación del movimiento del peso* P *suponiendo que se le abandone sin velocidad inicial en el punto* A. *¿Cuál es la duración de la oscilación del peso* P *y cuál su velocidad cuando llegue a* O? (fig. 22). *No se considera resistencia del aire.*

Aplicación numérica: $a = 10$ cm, $g = 980$ cm/seg^2.

— Llamemos x a la distancia del peso P al origen A, en un instante cualquiera, y *contemos positivamente hacia abajo.*

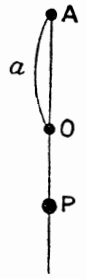


FIG. 22

Se tiene

$$P = mg,$$

por otra parte la fuerza atractiva hacia A es de la forma $-Kx$, dirigida en sentido inverso al peso, y la ecuación fundamental

$$\sum \text{de las fuerzas} = m\gamma$$

nos da

$$mg - Kx = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Por otra parte, de acuerdo con el enunciado, se tiene en O

$$mg = Ka \qquad \text{de donde} \qquad K = \frac{mg}{a},$$

y de donde

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mg}{a}x = mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{gx}{a} = g$$

ecuación diferencial del segundo orden, incompleta, con coeficientes y segundo miembro constantes.

Puede escribirse

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{gx}{a} - g\right) = 0,$$

pongamos

$$\frac{gx}{a} - g = u \qquad \text{de donde} \qquad du = \frac{g}{a}dx,$$

y la ecuación se escribe

$$\frac{a}{g}\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + g\frac{u}{a} = 0.$$

La ecuación característica es

$$\frac{g}{a} = 0 \qquad \text{de donde} \qquad r = \pm j\sqrt{\frac{g}{a}},$$

y la solución es

$$u = \text{A}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \text{B}\,\text{sen}\sqrt{\frac{g}{a}}\,t = \frac{gx}{a} - g,$$

por lo cual, cambiando las constantes

$$x = \frac{au}{g} + a$$

$$x = \text{M}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + \text{N}\,\text{sen}\sqrt{\frac{g}{a}}\,t + a.$$

Para $t = 0$. $x = 0$ así como $\dfrac{dx}{dt}$, lo que da

$$\text{M} = -a \qquad \text{y} \qquad \text{N} = 0.$$

Así pues, se tiene

$$\left.\begin{aligned} x &= a - a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \\ \frac{dx}{dt} &= \sqrt{ga}\,\text{sen}\sqrt{\frac{g}{a}}\,t. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

El movimiento $x = f(t)$ es, por tanto, sinusoidal y el peso P oscila de 0 a $2a$. El período es

$$\text{T} = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{a}}} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{10}{980}} = 0{,}63 \text{ seg.}$$

En O, $x = a$ y de acuerdo con las ecuaciones (1)

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$$

de donde, la velocidad

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{ag} = \sqrt{10 \cdot 980} = 99 \text{ cm/seg.}$$

5. 3. Problema III. Curva del perro. — *Un hombre* H *se desplaza sobre una recta* Oy *con movimiento uniforme de velocidad* v (fig. 23). *En el tiempo* $t = 0$ *está en* O *y llama a su perro que se halla en* A, *a una distancia* OA $= a$. *El animal corre hacia su amo con una velocidad constante doble que la de él, y dirigiéndose siempre hacia éste. Hallar la ecuación de la curva descrita por el perro y el tiempo que necesitará para alcanzar a su dueño.*

— Llamemos x e y a las coordenadas del perro al cabo del tiempo t; en este momento su amo está en H y se tiene OH $= vt$ (fig. 24).

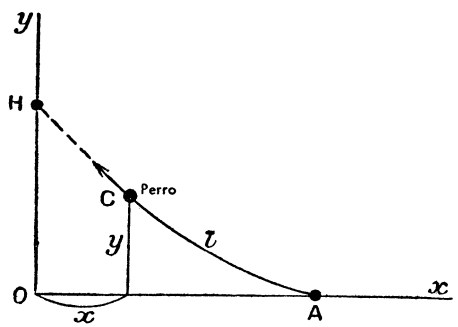


FIG. 23

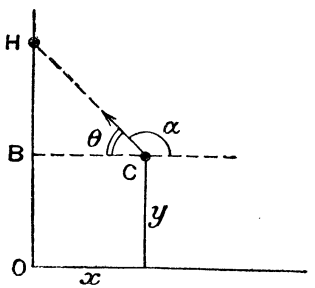


FIG. 24

— Llamemos l a la longitud del arco AC y calculemos la pendiente $\frac{dy}{dx}$ en el punto C.

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\theta = -\frac{BH}{BC}$$

$$= -\left(\frac{vt - y}{x}\right) = \frac{y - vt}{x}.$$

Por otra parte, $l = 2vt$, lo que nos dará

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - v \cdot \dfrac{l}{2v}}{x}$$

$$x\frac{dy}{dx} - y = -\frac{l}{x} \tag{1}$$

Ahora bien, se sabe que la longitud de un arco de curva es

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

pero poniendo el signo — delante de la raíz cuadrada, cuando x disminuye, l aumenta.

Derivemos la ecuación (1)

$$\frac{dy}{dx} \cdot 1 + x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dl}{dx}$$

$$x\frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2}(-\sqrt{1 + y'^2}).$$

Separemos las variables

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x},$$

integremos

$$\operatorname{Log}(y' + \sqrt{1 + y'^2}) = \frac{1}{2}\operatorname{Log} x + C,$$

No olvidemos que $t = 0$, $y' = 0$ y $x = a$, de donde

$$0 = \frac{1}{2}\operatorname{Log} a + C \qquad \text{y} \qquad C = -\frac{1}{2}\operatorname{Log} a.$$

La ecuación se convierte entonces

$$\operatorname{Log}(y' + \sqrt{1 + y'^2}) = \frac{1}{2}\operatorname{Log} x - \frac{1}{2}\operatorname{Log} a = \operatorname{Log}\sqrt{\frac{x}{a}} \tag{2}$$

$$y' + \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\frac{x}{a}} \tag{3}$$

Volvamos a la ecuación (2). Ya que los logaritmos son iguales, los números también lo son y lo son sus inversos

$$\operatorname{Log} \frac{1}{y' + \sqrt{1 + y'^2}} = \operatorname{Log} \sqrt{\frac{a}{x}}$$

$$\frac{1}{y' + \sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{\frac{a}{x}}$$

e incluso

$$\frac{y' - \sqrt{1 - y'^2}}{(y' + \sqrt{1 + y'^2})(y' - \sqrt{1 + y'^2})} = \sqrt{\frac{a}{x}}$$

$$\frac{y' - \sqrt{1 - y'^2}}{y'^2 - (1 + y'^2)} = \sqrt{\frac{a}{x}}$$

y, finalmente,

$$y' - \sqrt{1 + y'^2} = -\sqrt{\frac{a}{x}}. \tag{4}$$

Sumemos las dos expresiones (3) y (4), y dividamos por 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right)$$

$$dy = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right)dx$$

$$y = \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x}{a}}\,dx - \frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{a}{x}}\,dx + C$$

$$y = \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} - \sqrt{ax} + C$$

como $x = a$, $y = 0$, tendremos finalmente, $C = \frac{2a}{3}$,

la ecuación de la curva es, por lo tanto,

$$y = \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} - \sqrt{ax} + \frac{2a}{3}.$$

El perro encuentra a su dueño cuando $x = 0$, de donde

$$y = \frac{2a}{3} \quad \text{y} \quad t = \frac{2a}{3v}.$$

5. 4. Problema IV. Movimiento de un punto atraído o repelido por un centro fijo O, proporcionalmente a la distancia (fig. 25).

1.° **Caso de atracción.** — — Sean P_0 la posición inicial de la abscisa x_0, v_0 la velocidad inicial dirigida hacia el centro O, y llamemos m a la masa del cuerpo

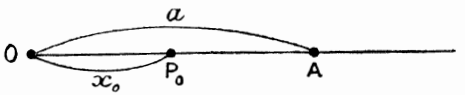


FIG. 25

La fuerza que actúa sobre el cuerpo es

$$F = -K^2x \qquad (K^2 \text{ es una constante} > 0)$$

con el signo —, ya que F se dirige en sentido inverso de x.

La fórmula fundamental del movimiento $F = ma$ da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K^2x$$

o, poniendo $\dfrac{K^2}{m} = \omega^2$ $\qquad \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$

ecuación de segundo orden sin segundo miembro, de la que la ecuación característica es

$$r^2 + \omega^2 = 0, \qquad \text{de donde} \qquad r = \pm j\omega.$$

La solución es, pues, sinusoidal

$$x = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t.$$

Calculemos A y B:

para

$$t = 0, \qquad x = x_0, \qquad \text{de donde} \qquad x_0 = A,$$

además

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t + B\omega\cos\omega t$$

y para

$$t_1 = 0, \qquad v = v_0, \qquad de \text{ donde} \qquad v_0 = B\omega, \qquad B = \frac{v_0}{\omega},$$

lo que da

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t = \mathrm{M} \operatorname{sen} (\omega t - \varphi)$$

El coeficiente de t es la pulsación ω, de la que el período T es

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{\sqrt{m}}{\mathrm{K}}$$

siendo independiente de las condiciones iniciales.

La frecuencia es $f = \frac{1}{\mathrm{T}}$. Se tiene un *movimiento periódico sinusoidal*: es decir, el más sencillo de todos los movimientos periódicos; se llama también *movimiento pendular* o *movimiento armónico.*

La cantidad x se denomina elongación o amplitud instantánea de la vibración, M es la amplitud máxima de y φ la fase.

—Si en un fenómeno vibratorio, la amplitud instantánea viene dada por

$$x = \mathrm{A} \operatorname{sen} \omega t,$$

la velocidad es

$$v = \frac{dx}{dt} = \mathrm{A}\omega \cos \omega t,$$

y la aceleración

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = -\mathrm{A}\omega^2 \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 x.$$

La fuerza que produce el movimiento (o la fuerza resultante), es, llamando m a la masa del cuerpo en movimiento y a a la acerelación:

$$\mathrm{F} = ma = -m\omega^2 x = \mathrm{K}\omega^2,$$

resultando proporcional al cuadrado de la frecuencia.

2.° **Caso de repulsión.** —Siendo la fuerza

$$\mathrm{F} = +\mathrm{K}^2 x$$

la ecuación del movimiento es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{F} = \mathrm{K}^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x = 0, \qquad \left(\text{con } \omega^2 = \frac{\mathrm{K}^2}{m}\right)$$

de la cual la ecuación característica es

$$r^2 - \omega^2 = 0, \qquad \text{de donde} \qquad r = \pm\,\omega.$$

Al ser reales las raíces, la solución es

$$x = Ae^{\omega t} + B^{-\omega t}.$$

Con las mismas condiciones iniciales que en el caso de atracción, se calculará A y B exactamente de la misma forma y obtendremos finalmente

$$x = x_0 \left(\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right) + \frac{v_0}{\omega}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right)$$

que puede escribirse, por medio de líneas hipérbolicas,

$$\boxed{x = x_0 \operatorname{cosec} \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sec \omega t}$$

expresión que extrañamente se parece a la de la atracción.

5. 5. Problema V. Generalización. — *Hallar en el plano la trayectoria de una partícula electrizada que es atraída por un centro fijo O con una fuerza proporcional a la distancia.*

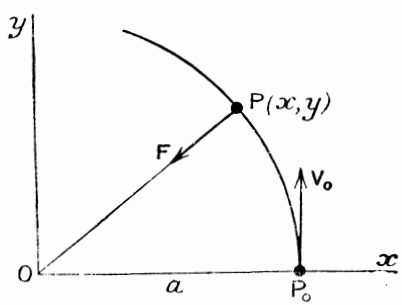


FIG. 26

— Si un punto es atraído por un centro fijo O siguiendo una ley cualquiera, su trayectoria es una curva plana, situada en el plano determinado por este punto O y la velocidad inicial.

Sea P_0 la posición inicial y V_0 la velocidad inicial supuesta perpendicular al eje Ox (fig. 26).

— Tomemos la partícula en un instante cualquiera, en un punto P de coordenadas x e y, y sea la fuerza central F

$$F = K^2 \cdot OP = ma$$

de la que las proyecciones son X sobre el eje Ox e Y sobre el Oy (con el signo —, ya que F se dirige en sentido inverso al positivo de los ejes):

$$X = -K^2x \qquad \text{e} \qquad Y = -K^2y,$$

o incluso, haciendo intervenir las aceleraciones,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K^2x \qquad \text{y} \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -K^2y$$

y, poniendo

$$\frac{K^2}{m} = \omega^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2y. \tag{1}$$

Para $t = 0$, se tiene (en P_0)

$$x_0 = a \qquad \text{e} \qquad y_0 = 0$$

y las derivadas son (V_0 es perpendicular al eje Ox):

$$\frac{dx}{dt} = x_0' = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = y_0' = V_0.$$

En el párrafo anterior, hemos resuelto la primera de las dos ecuaciones (1), su solución es

$$x = a\cos\omega t + \frac{x_0'}{\omega}\operatorname{sen}\omega t = a\cos\omega t. \tag{1}$$

En cuanto a la segunda, idéntica a la primera, cambiando x por y, se obtiene

$$y = y_0\cos\omega t + \frac{y_0'}{\omega}\operatorname{sen}\omega t = \frac{V_0}{\omega}\operatorname{sen}\omega t. \tag{3}$$

De las ecuaciones (2) y (3) obtendremos

$$\frac{x}{a} = \cos\omega t \qquad \text{e} \qquad y\frac{\omega}{V_0} = \operatorname{sen}\omega t,$$

lo que da la ecuación de la curva

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2\frac{\omega^2}{V_0^2} = 1$$

que es la ecuación de una elipse de centro O (Véase el Tomo VI). La duración de una revolución alrededor de la elipse es el período, o sea $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Caso de repulsión. — Tomando los mismos ejes, las ecuaciones del movimiento serán idénticas, excepto el signo, lo que procede del cambio de sentido de la fuerza

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 y.$$

Las condiciones iniciales son las mismas, para $t = 0$:

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0, \quad x_0' = 0 \quad \text{e} \quad y_0' = V_0.$$

Volviendo a los cálculos hechos en el párrafo anterior, en el caso de la atracción, la primera de las dos ecuaciones resulta después de integrada:

$$x = x_0 \operatorname{cosec} \omega t + \frac{x_0'}{\omega} \sec \omega t$$

y la segunda

$$y = y_0 \operatorname{cosec} \omega t + \frac{y_0'}{\omega} \sec \omega t,$$

que se convierten, con nuestras condiciones iniciales,

$$x = a \operatorname{cosec} \omega t \qquad \text{e} \qquad y = \frac{V_0}{\omega} \sec \omega t.$$

Se obtiene

$$\operatorname{cosec} \omega t = \frac{x}{a} \qquad \text{y} \qquad \sec \omega t = y \frac{\omega}{V_0},$$

y como

$$\operatorname{cosec}^2 \omega t - \sec^2 \omega t = 1,$$

resulta la ecuación de la trayectoria

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2\omega^2}{V_0^2} = 1$$

que es una hipérbola de centro O (Véase el Tomo VI de este Curso).

Nótese que la velocidad de la partícula es mínima en el vértice de la hipérbola, y que tiende a infinito cuando esta partícula también se aleja hacia infinito.

— Se observará la simetría de las fórmulas obtenidas en los casos de atracción y repulsión.

5. 6. Problema VI. Sólido girando alrededor de un eje. — Hemos establecido al principio del Tomo IV (*Cálculo Integral*), la fórmula fundamental de los cuerpos que giran alrededor de un eje. Si se llama I el momento de inercia en relación al eje y $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ la aceleración angular, se ha visto que es

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \Sigma \text{ de los momentos de las fuerzas.}$$

— Coloquémonos en el caso en que las fuerzas aplicadas al cuerpo tienen un momento resultante, con el cual el eje tiende a volver a su posición de equilibrio. Sea θ el ángulo de desviación de la posición de equilibrio y $C\theta$ el momento resultante de las fuerzas aplicadas, momento que supondremos proporcional al ángulo θ. Como este momento actúa en sentido inverso del ángulo θ, es negativo, de donde la ecuación

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta = 0.$$

La ecuación característica es

$$Ir^2 + C = 0, \qquad \text{de donde} \qquad r = \pm j\sqrt{\frac{C}{I}}$$

por consiguiente, la solución es

$$\theta = \theta_0 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{C}{I}}\,t - \varphi\right).$$

El movimiento resulta perpendicular o sinusoidal, y como el coeficiente de t representa la pulsación ω, se deduce el período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$

que es independiente de la amplitud, y por lo mismo constante.

Esto es lo que se produce cuando el par $C\theta$ es debido a la torsión de un hilo elástico, un resorte espiral o un muelle, como ocurre en el balanceo en espiral de un reloj, o en el cuadro móvil de un aparato eléctrico de medida.

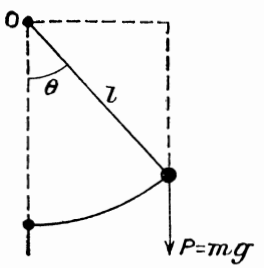


FIG. 27

Aplicación al péndulo simple (fig. 27). — Situémonos en un momento tal que el ángulo sea θ. El momento de la fuerza $P = mg$, que tiende a volver al estado de equilibrio, es

$$\text{Momento} = P \cdot l \operatorname{sen} \theta = mg\, l \operatorname{sen} \theta,$$

y, si se supone que el ángulo θ es lo bastante pequeño para que se puedan confundir el seno y el ángulo ($\theta < 10°$ a $20°$), podrá escribirse

$$\text{Momento} = mgl \cdot \theta = C\theta.$$

Por otra parte, el momento de inercia con respecto al eje es $I = ml^2$, el período T es, por consiguiente,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

En París donde $g = 980{,}98$, el péndulo que bate el segundo $\left(\text{sea } \frac{T}{2}\right)$ tiene una longitud de

$$l = 99{,}394 \text{ cm},$$

suponiendo despreciable el peso del hilo.

5. 7. Problema VII. Fórmula general para calcular el período de un sistema oscilante. — Supongamos un cuerpo que oscila de una forma cualquiera bajo la acción de fuerzas cualesquiera. Este cuerpo tiene una posición de equilibrio, y, si se desvía, vuelve a adoptar la misma. Si θ es el ángulo en un instante cualquiera, con respecto a su posición de equilibrio, y si I es el momento de inercia con relación al eje (Véase el Tomo IV del *Cálculo integral*), se ha visto que se tiene

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Sigma \text{ de los momentos de las fuerzas} = f(\theta)$$

dependiendo, evidentemente, del ángulo θ, los momentos de dichas fuerzas.

— Desarrollemos la función $f(\theta)$ en serie de MAC-LAURIN

$$f(\theta) = f(0) + \theta \cdot f'(0) + \frac{\theta^2}{2!} \cdot f''(0) + \ldots,$$

donde θ se cuenta a partir de la posición de equilibrio; resulta que si θ aumenta, los momentos de las fuerzas aumentan igualmente. Por otra parte

$$f(0) = 0$$

y, si θ es pequeño, puede despreciarse el término en θ^2, quedando entonces solamente

$$f(\theta) = \theta \cdot f'(0),$$

que nos da la ecuación diferencial

$$I\theta'' = \theta \cdot f'(0)$$
$$I\theta'' = \theta \cdot f'(0) = 0.$$

Habrá oscilación cuando la ecuación característica:

$$Ir^2 - f'(0) = 0$$

tenga raíces imaginarias. Se obtiene:

$$r = \pm \sqrt{\frac{f'(0)}{I}}$$

por lo cual será preciso que se tenga, ya que I es esencialmente positivo,

$$f'(0) < 0,$$

de donde

$$r = \pm j \sqrt{\frac{f'(0)}{I}} = \pm j\Omega$$

La solución es entonces

$$\theta = \theta_0 \cdot \operatorname{sen} (\Omega t - \varphi)$$

y el período

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{-f'(0)}}}$$

Ejemplo. — *Sea un imán alargado que se coloca en un campo magnético de inducción* B, *dirigido siguiendo el eje del imán* (figura 28). *Si se desvía un ángulo* θ_0, *el imán toma su posición inicial después de una serie de oscilaciones de las que vamos a calcular el período.*

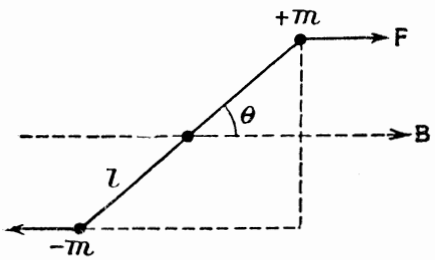


FIG. 28

— Llamemos F a la fuerza que actúa sobre la masa magnética m de cada polo, se tiene $F = mB$.

El momento del par, con respecto al eje, es, llamando l a la longitud total del imán,

$$M^t = -F \cdot l \operatorname{sen} \theta = -mBl \operatorname{sen} \theta,$$

con el signo —, ya que es éste un momento «retardatriz». Se tiene así la ecuación

$$f(\theta) = -mBl \operatorname{sen} \theta,$$

de donde, derivando,

$$f'(\theta) = -mBl \cos \theta$$

y

$$-f'(0) = +mBl,$$

y por tanto, el período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mBl}}.$$

Si en un sistema oscilante no se tuviera más que un par de torsión C, que es una función de θ, se tendría aún

$$C = \theta \cdot f(0) < 0,$$

de donde el período

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}}$$

fórmula fundamental y clásica de todos los cuerpos que giran alrededor de un eje.

5. 8. Problema VIII. Oscilaciones forzadas de un sistema oscilante cualquiera. Resonancia.

— Supongamos el caso general de una masa de peso m, sometida a una fuerza proporcional, con la amplitud x del desplazamiento, dirigida en sentido inverso y sin amortiguación.

La ecuación del movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K^2x \qquad (K^2 > 0)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + K^2x = 0,$$

en consecuencia, el sistema es oscilante y la amplitud instantánea resulta

$$x = x_0 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{K^2}{m}}\, t;$$

es decir, una sinusoide sin amortiguar.

Pongamos $\omega_0^2 = \dfrac{K^2}{m}$, y supongamos ahora que este sistema, capaz de oscilar, esté sometido a una causa exterior oscilante, sinusoidal y de pulsación ω. Será pues, una fuerza impuesta que va a actuar sobre el sistema, y si x_0 es la amplitud máxima, la ecuación del movimiento se convierte en

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + K^2x = K^2x_0 \operatorname{sen} \omega t, \qquad (1)$$

ecuación de segundo orden con segundo miembro variable.

La solución es sinusoidal, al menos para el régimen permanente:

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi). \qquad (o\ -\varphi)$$

Se obtiene

$$x' = A\omega \cos (\omega t + \varphi)$$

$$x'' = -A\omega^2 \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) = -\omega^2 x.$$

Sustituyamos en la ecuación (1), y se obtendrá

$$-Am\omega^2 x + K^2x = K^2x_0 \operatorname{sen} \omega t$$

$$A(K^2 - m\omega^2) \operatorname{sen} (\omega t + \varphi) = K^2x_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

Por consiguiente

$$\left|\begin{array}{llll} \text{si} & K^2 < m\omega^2 \quad \text{u} \quad \omega < \omega_0, & A = \dfrac{K^2 x_0}{K^2 - m\omega^2}, & \varphi = 0 \\ \text{si} & K^2 > m\omega^2 \quad \text{u} \quad \omega > \omega_0, & A = \dfrac{K^2 x_0}{m\omega^2 - K^2}, & \varphi = \pi. \end{array}\right.$$

Resulta que

$$\left|\begin{array}{ll} \text{para} & \omega < \omega_0, \quad \text{el movimiento está en fase,} \\ \text{para} & \omega > \omega_0, \quad \text{el movimiento está en oposición.} \end{array}\right.$$

Si $\omega = \omega_0$, $A = \infty$ (en teoría, ya que se desprecian las fuerzas de amortiguación), hay resonancia: *la amplitud del movimiento crece considerablemente, y hay aparición de enormes fuerzas.*

Así la resonancia (mecánica aquí) permite, con fuerzas pequeñas, obtener intensos e incluso violentos efectos.

Por último, si $\omega \to \infty$, la amplitud A tiende a cero.

Damos en el párrafo 5.19 complementos sobre el mismo asunto.

En radio y con circuitos oscilantes se obtienen efectos análogos, lo que permite corregir corrientes intensas y de tensiones muy altas o sobretensiones utilísimas para amplificadores o emisión.

5. 9. Problema IX. Cálculo del período de un resonador acústico (*esfera de* HELMHOLTZ). — Desde BRUHAT, una esfera hueca de 7 centímetros de diámetro con un orificio de 20 milímetros de diámetro refuerza el sonido *ut*$_4$, de frecuencia 512, es decir 66,5 cm de longitud de onda. La longitud de onda es, pues, cerca de diez veces mayor que el diámetro; y entonces puede admitirse que en cada instante la presión interior es la misma en todo el volumen Z. Pero no puede despreciarse la velocidad V de la masa de aire que se contiene en la tobera estrecha, y si z es el volumen de esta tobera, su masa será δz (en donde δ es la masa del volumen), ya que en este lugar es grande la velocidad a causa de la gran diferencia de presión.

— Si p_0 es la presión a la entrada,
p la presión en el interior,
s la sección de la tobera,

la fuerza que actúa sobre la masa δz ha de ser, evidentemente,

$$F = s(p - p_0)$$

y la fórmula fundamental $F = m\gamma$ nos dará

$$s(p - p_0) = \delta z \cdot \gamma = \delta z \frac{dv}{dt}. \qquad (1)$$

Por otra parte, durante un tiempo dt, una lámina de sección s se desplaza de

$$dx = v\,dt,$$

La variación de volumen de la tobera es $svdt$, y ello bajo la acción de una variación de presión dp.

Por otra parte, la velocidad del sonido nos es dada por la fórmula de NEWTON

$$V = \sqrt{\frac{E}{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{C\delta}}$$

donde E es el módulo de elasticidad y C el coeficiente de compresibilidad.

Calculemos C. La variación de volumen de Z es $svdt$, la variación relativa $\frac{svdt}{Z}$, y dividiendo por dp se llega a la variación unidad de presión. Así se obtiene el coeficiente de comprensibilidad C.

$$C = -\frac{svdt}{Zdp}$$

con el signo —, ya que si p aumenta, el volumen disminuye. Se obtiene

$$v = -C\frac{Zdp}{sdt},$$

derivemos

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{CZ}{s}\frac{d^2p}{dt^2}.$$

Sustituyamos este valor en la ecuación (1)

$$s(p - p_0) = \delta z \left(-\frac{CZ}{s}\frac{d^2p}{dt^2}\right),$$

y, finalmente, sustituyamos C por $\frac{1}{V^2\delta}$,

$$s(p - p_0) = -\delta z \frac{Z}{V^2\delta s}\frac{d^2p}{dt^2}$$

de donde

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \frac{V^2s^2}{zZ}(p - p_0) = 0,$$

ecuación diferencial de la forma $y'' + K^2y = 0$.

Consecuentemente, la presión p varía sinusoidalmente y la solución es por ello sinusoidal

$$y = A \operatorname{sen}(Kt - \varphi)$$

es decir

$$p = P \operatorname{sen}\left(\frac{Vs}{\sqrt{zZ}}t - \varphi\right) = P \operatorname{sen}(\omega t - \varphi).$$

El período es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{\sqrt{zZ}}{Vs},$$

de donde una longitud de onda

$$\lambda = VT = 2\pi\frac{\sqrt{zZ}}{s}.$$

Para un diámetro de 7cm ($Z = 162$ cm^3), una tobera de 10 mm de radio ($s = 3$ cm^2), y un volumen de $z = 5$ cm^3, se obtiene

$$\lambda = \frac{2\pi\sqrt{5 \cdot 162}}{3} \approx 60 \text{ cm},$$

lo que, más o menos, está de acuerdo con la experiencia.

Esta experiencia indica además que la frecuencia del sonido no depende más que del volumen Z y *no de la forma de la cavidad,* y que varía en razón inversa de la raíz cuadrada del volumen. Finalmente, es necesario señalar que la amortiguación es insignificante (siendo s muy pequeño) y la resonancia, muy aguda.

5. 10. Problema X. Sobre la gravedad. — *Un peso* P *se abandona sin velocidad inicial a una altura, sobre el suelo, igual al radio terrestre* R. *Calcular al cabo de cuánto tiempo llegará al suelo y con qué velocidad, despreciando la resistencia del aire.*

— Se sabe que, siguiendo la ley de NEWTON, la Tierra atrae los cuerpos con una fuerza que varía en razón inversa al cuadrado de la distancia; además, a la superficie del suelo, siendo esta fuerza simplemente el peso del cuerpo $P = mg$.

Coloquémonos a la distancia x del centro de la Tierra, variando x desde 2R al principio hasta R al final. En este momento, la fuerza es

$$F = -\frac{K}{x^2}$$

con el signo —, ya que x se cuenta en sentido inverso a la fuerza F, y la fórmula fundamental del movimiento $F = m\gamma$ da

$$-\frac{K}{x^2} = m\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (1)$$

Para $x = R$, se tiene

$$F = P = mg = \frac{K}{R^2}$$

de donde

$$K = mgR^2$$

La ecuación (1) se transforma en

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg\,R^2}{x^2}$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{x^2},$$

ecuación incompleta en la que el segundo miembro depende de la función x.

Multipliquemos los dos miembros por $2\frac{dx}{dt}dt$

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}dt = -2g\frac{R^2}{x^2}\frac{dx}{dt}dt$$

o

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -2g\,R^2\frac{dx}{x^2}.$$

Integremos

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2g\,R^2}{x} + C,$$

ahora bien, para $x = 2R$, la velocidad $\frac{dx}{dt}$ es nula, por consiguiente

$$0 = \frac{2g\,R^2}{2R} + C \qquad y \qquad C = -gR,$$

y

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2g\,R^2}{x} - gR = gR\left(\frac{2R}{x} - 1\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = v = \pm\sqrt{gR}\sqrt{\frac{2R}{x} - 1}. \qquad (2)$$

Tomamos el signo —, ya que esta velocidad se dirige hacia abajo, en sentido inverso de x.

Al nivel del suelo, $x = R$, y queda

$$v = -\sqrt{gR}.$$

Si $g = 9{,}81$ m/seg^2 y $R = 6.366.000$ m, se obtiene $V = 8.000$ m/seg.

Para calcular la duración de la caída, basta integrar la ecuación (2):

$$T = \frac{1}{\sqrt{gR}}\int_R^{2R} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2R}{dt} - 1}} = \sqrt{\frac{R}{g}}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Introduciendo valores numéricos, se obtiene

$$T = 2.000 \text{ segundos.}$$

5. 11. Problema XI. Teniendo en cuenta la resistencia del aire. — *Se lanza un peso* P *verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial* V_0, *oponiendo el aire una resistencia que depende de la velocidad. Calcular la velocidad de la subida.*

Primer caso. — *La resistencia del aire es proporcional a la velocidad* v.

— Situémonos a la distancia x del punto de partida y sea $v = \frac{dx}{dt}$ la velocidad en este lugar dirigida hacia arriba. Dos fuerzas verticales actúan sobre el cuerpo:

1.° el peso $P = mg$,

2.° la resistencia del aire $F = Kv$, que escribiremos para simplificar los cálculos siguientes:

$$F = Kgv.$$

La fórmula fundamental de la dinámica da:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma \text{ de las fuerzas}$$

o

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \mathrm{K}gv,$$

indicando el signo — que las dos fuerzas actúan en sentido contrario del movimiento.

Así se tendrá:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\mathrm{K}g}{m}v = -g,$$

ecuación diferencial de primer orden en v, con coeficientes y segundo miembro constantes.

Resolución. — Se tiene:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\mathrm{K}g}{m}v + g = 0,$$

pongamos

$$\frac{\mathrm{K}g}{m}v + g = u, \qquad \text{de donde} \qquad du = \frac{\mathrm{K}g}{m}dv,$$

y la ecuación se transforma en

$$\frac{m}{\mathrm{K}g}\frac{du}{dt} + u = 0.$$

Separemos las variables, y pongamos $\frac{m}{\mathrm{K}g} = a$:

$$a\frac{du}{dt} = -u$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{a}.$$

Integremos

$$\mathrm{Log}\, u = -\frac{t}{a} + \mathrm{Log}\, \mathrm{C}.$$

Ahora bien, para $t = 0$, $v = \mathrm{V}_0$ y $u = \frac{\mathrm{K}g\mathrm{V}_0}{m} + g$, de donde

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{K}g\mathrm{V}_0}{m} + g = \frac{\mathrm{V}_0}{a} + g$$

de donde

$$\operatorname{Log} u - \operatorname{Log} C = -\frac{t}{a}$$

$$\operatorname{Log} \frac{u}{C} = -\frac{t}{a}$$

y

$$u = Ce^{-\frac{t}{a}} = \left(\frac{V_0}{a} + g\right)e^{-\frac{t}{a}},$$

$$= \frac{Kgv}{m} + g = \frac{v}{a} + g,$$

de donde

$$\frac{v}{a} = \left(\frac{V_0}{a} + g\right)e^{-\frac{t}{a}} - g$$

y

$$v = a\left(\frac{V_0}{a} + g\right)e^{-\frac{t}{a}} - ga$$

$$= V_0 e^{-\frac{t}{a}} - \frac{m}{K}\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)$$

Se tiene:

$$dx = v\,dt = V_0 e^{-\frac{t}{a}}\,dt - \frac{m}{K}\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)dt.$$

Integremos:

$$x = -aV_0 e^{-\frac{t}{a}} - \frac{m}{K}\left(t + ae^{-\frac{t}{a}}\right) + C,$$

pero, $t = 0$, $x = 0$, lo que da

$$0 = -aV_0 - \frac{m^2}{K^2 g} + C,$$

de donde

$$C = aV_0 + \frac{m^2}{K^2 g}.$$

La ecuación de x se transforma en:

$$x = -aV_0 e^{-\frac{t}{a}} - \frac{m}{K}\left(t + ae^{-\frac{t}{a}}\right) + \left(aV_0 + \frac{m^2}{K^2 g}\right)$$

$$= aV_0\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) + \frac{m^2}{K^2 g}\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) - \frac{m}{K}t,$$

o finalmente:

$$x = a\left(V_0 + \frac{m}{K}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right) - \frac{m}{K}t,$$

Al final de la trayectoria $v = 0$, de donde:

$$0 = V_0 e^{-\frac{t}{a}} - \frac{m}{K}\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)$$

o

$$V_0 e^{-\frac{t}{a}} = \frac{m}{K}\left(1 - e^{-\frac{t}{a}}\right)$$

$$\left(V_0 + \frac{m}{K}\right)e^{-\frac{t}{a}} = \frac{m}{K}$$

$$e^{-\frac{t}{a}} = \frac{m}{K}\left(\frac{m}{KV_0 + m}\right) = \frac{m}{KV_0 + m}$$

$$-\frac{t}{a} = \text{Log}\,\frac{m}{KV_0 + m}$$

y

$$t = a\,\text{Log}\left(\frac{KV_0 + m}{m}\right)$$

que representa la duración de la subida.

La altura de la trayectoria se tendrá sustituyendo este valor de t en x, lo que da, hechos y simplificados todos los cálculos:

$$h = a\left[V_0 - \frac{m}{K}\,\text{Log}\,\frac{KV_0 + m}{m}\right].$$

Segundo caso. — *La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad.*

— La fórmula fundamental de la dinámica nos da:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma \text{ de las fuerzas,}$$

o

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - F_{aire.}$$

Pongamos, para simplificar los cálculos que siguen:

$$F = gKv^2,$$

lo que da la ecuación diferencial:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - gKv^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(1 + \frac{Kv^2}{m}\right) = -g(1 + \alpha^2v^2),$$

de donde

$$\alpha^2 = \frac{K}{m}.$$

Resolución. — Separemos las variables:

$$\frac{dv}{1 + \alpha^2v^2} = -gt.$$

Integremos:

$$\int\frac{dv}{1 + \alpha^2v^2} = -gt + C$$

$$\frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,tg}\,\alpha v = -gt + C.$$

Ahora bien, si $t = 0$, $v = V_0$, de donde

$$C = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,tg}\,\alpha V_0.$$

Por consiguiente, se tendrá:

$$gt = \frac{1}{\alpha}(\operatorname{arc\,tg}\,\alpha V_0 - \operatorname{arc\,tg}\,\alpha v).$$

La duración de la subida se obtiene haciendo $v = 0$, de donde

$$t_1 = \frac{1}{\alpha g} \operatorname{arc\,tg}\, \alpha V_0.$$

Calculemos v. Se obtiene:

$$\alpha g t = \operatorname{arc\,tg}\, \alpha V_0 - \operatorname{arc\,tg}\, \alpha v,$$

$$= \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\alpha V_0 - \alpha v}{1 + \alpha^2 V_0 v} \right)$$

y

$$\operatorname{tg}\, \alpha g t = \frac{\alpha V_0 - \alpha v}{1 + \alpha^2 V_0 v},$$

$$(1 + \alpha^2 V_0 v) \operatorname{tg}\, \alpha g t = \alpha V_0 - \alpha v$$

$$v(\alpha + \alpha^2 V_0 \operatorname{tg}\, \alpha g t) = \alpha V_0 - \operatorname{tg}\, \alpha g t$$

$$v = \frac{\alpha V_0 - \operatorname{tg}\, \alpha g t}{\alpha(1 + \alpha V_0\, t\, \alpha g t)}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg}\, (\theta - \alpha g t) \qquad (\text{con } \operatorname{tg}\, \theta = \alpha V_0).$$

Al final, v_0 es nula:

$$\alpha V_0 = \operatorname{tg}\, \alpha g t_1$$

$$\alpha g t_1 = \operatorname{arc\,tg}\, \operatorname{tg}\, \alpha\, V_0,$$

y vuelve a tenerse el valor

$$t_1 = \frac{1}{\alpha g} \operatorname{arc\,tg}\, \alpha V_0.$$

Calculemos el espacio recorrido x, ya que

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg}\, (\theta - \alpha g t),$$

de donde

$$x = \frac{1}{\alpha} \int \operatorname{tg}\, (\theta - \alpha g t)\, dt + C,$$

para $t = 0$, $x = 0$, y después de hechos todos los cálculos se obtiene:

$$x = \frac{1}{x^2 g} \operatorname{Log} \frac{\cos\, (\theta - \alpha g t)}{\cos\, \theta}$$

La altura total esperada se obtiene para

$$t = \frac{1}{\alpha g} \operatorname{arc\,tg} \alpha V_0,$$

o cuando $\alpha = \theta gt$, ya que en este momento $\cos(\alpha - \theta gt) = 1$, y x es máximo.

$$h = \frac{1}{2g\alpha^2} \operatorname{Log}(1 + \alpha^2 V_0^2).$$

5. 12. Problema XII. Establecimiento de la fórmula fundamental de resistencia de materiales (flexión de vigas).

— Podríamos tomar una viga horizontal apoyada en dos puntos, pero, por razones de simplicidad y claridad, tomemos antes una viga horizontal sujeta a un extremo y sometido el otro a una fuerza P (fig. 29).

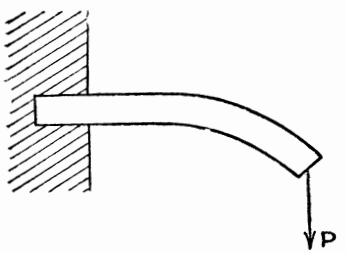


FIG. 29

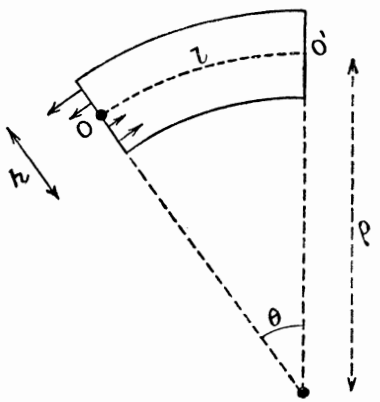


FIG. 30

— Sea OO′ la fibra neutra, donde el esfuerzo es nulo, es decir, donde la longitud no cambia: encima la materia se estira y debajo se comprime.

Llamemos, asimilando la viga curvada a un arco de círculo (figura 30):

S la sección de la viga,

ρ el radio de curvatura de la fibra neutra,

l la longitud inicial de la viga,

y la distancia de una fibra cualquiera encima de la línea neutra (fig. 31).

Se tiene, para la fibra media

$$l = \rho\theta$$

y para la fibra a la distancia y, de la que la longitud ha aumentado en dl

$$l + dl = (\rho + y)\theta$$

de donde

$$dl = y\theta = y\frac{l}{\rho}.$$

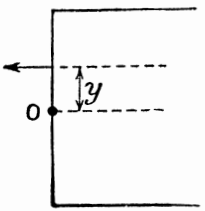


FIG. 31

El alargamiento unitario i es

$$i = \frac{dl}{l} = \frac{y}{\rho}.$$

Denominemos a el espesor de la viga (perpendicular al plano de la figura) y sea dy un pequeño aumento de y. Sobre la superficie $a \cdot dy$ se ejerce una fuerza $d\mathrm{F}$ (fig. 32): llamemos, siguiendo la notación habitual, n el esfuerzo por unidad de superficie.

$$n = \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{S}} = \frac{d\mathrm{F}}{a\,dy}$$

Ahora bien, i es proporcional a n, en tanto que no sobrepase el límite de elasticidad (esto es, la ley de HOOKE), y puede escribirse $n = \mathrm{K}i$ donde K es una constante, que ha sido calificada módulo de elasticidad E.

Sea, por consiguiente,

$$n = \mathrm{E}i$$

o

$$\frac{d\mathrm{F}}{a\,dy} = \mathrm{E} \cdot \frac{y}{\rho}$$

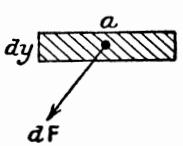


FIG. 32

de donde

$$d\mathrm{F} = \frac{a\mathrm{E}}{\rho} y\,dy \qquad (1)$$

es la suma de todos los $d\mathrm{F}$ sustituida la parte izquierda de la viga supuesta elevada, y equilibrando con la fuerza de la derecha.

En efecto, estando en equilibrio todo el sistema, tomemos los momentos con respecto al punto O de todas las fuerzas, y escribamos que la suma algebraica de todos estos momentos es nula, o incluso que:

Σ de los momentos de las fuerzas de la izquierda = Σ de los momentos de las fuerzas de la derecha,

es decir $\int y \cdot dF = M$, (aquí M es también igual a $P \cdot l$)

que se llama también momento de flexión.

Multiplicando por y la ecuación (1) e integrando, se obtiene

$$\int_0^h y\, dF = M = \frac{E}{\rho} \int a y^2\, dy.$$

Ahora bien, $a dy \cdot y^2$ es el momento de inercia de la lámina dy con respecto a la línea neutra (que en realidad pasa por el centro de gravedad de la sección S), y si se llama I el momento de inercia de la sección S con respecto al eje que pasa por O y por G

$$I = \int a y^2\, dy$$

se tendrá

$$M = \frac{EI}{\rho}.$$

Por otra parte, el radio de curvatura es

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Pero como las flexiones de las vigas son siempre muy ligeras, y' que es la pendiente, resulta prácticamente nula en cada punto, por consiguiente, $\rho = \frac{1}{y''}$, lo que da

$$M = EIy''$$

o, finalmente,

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$$

fórmula fundamental de la flexión en Resistencia de Materiales, y de la que vamos a hacer dos aplicaciones.

5. 13. Problema XIII. Cálculo de la flexión de una viga. — Supongamos, por ejemplo, una viga horizontal apoyada en dos puntos en sus extremos. Esta viga, cargada de una forma cualquiera, se va a flexionar. Tomemos el eje de la viga como eje de las x y llamemos y

la desnivelación vertical de la viga en un punto cualquiera, es decir, la flexión (fig. 33).

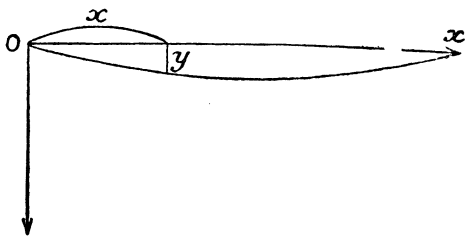


FIG. 33

—Si se llama:

I, el momento de inercia de la sección de la viga con respecto a su centro de gravedad,

E, el módulo de elasticidad del metal,

M, la suma de los momentos de todas las fuerzas situadas a la derecha (o a la izquierda) de la sección considerada a la distancia x, *comprendiendo los momentos debidos a las reacciones de los puntos de apoyo,*

ρ, el radio de curvatura de la viga, en un punto cualquiera de abscisa x.

Se tiene la misma fórmula que en el caso de la viga sujeta

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}.$$

ecuación diferencial con segundo miembro constante.

Integrando dos veces se obtendrá la flexión y en un punto cualquiera.

Pongamos un ejemplo importante:

Viga de longitud l cargada uniformemente con una carga p por unidad de longitud (fig. 34).

—Tomemos una sección A a la distancia x del apoyo de la izquierda y sustituyamos los dos apoyos por las reacciones $\frac{pl}{2}$ que ejercen, las cuales se dirigen de abajo arriba, como se representan en la figura 35.

—El momento de flexión M debido a las fuerzas situadas a la izquierda de A es, con respecto al punto A:

$$M = \frac{pl}{2} \cdot x - \frac{px^2}{2}, \tag{1}$$

en efecto, la carga repartida sobre la longitud x es $p \cdot x$ y su momento con respecto a la sección A de la viga es $px \cdot \frac{x}{2}$ o $\frac{px^2}{2}$, con el

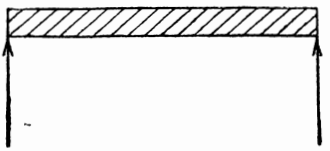


FIG. 34

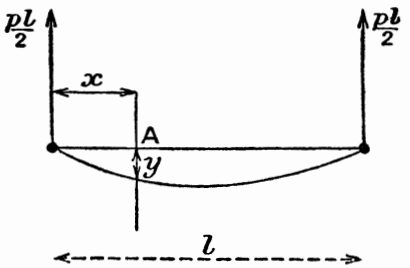


FIG. 35

signo —, ya que, con respecto al punto A, el momento de esta carga es de sentido contrario al momento de la reacción de la izquierda $\frac{pl}{2}$

Por consiguiente, se tendrá

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left(\frac{plx}{2} - \frac{px^2}{2}\right).$$

Integremos

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{pl}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{px^3}{6} + C,$$

integremos nuevamente

$$EIy = \frac{pl}{2} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{px^4}{24} + Cx + C' \tag{2}$$

—Calculemos las constantes

para $x = 0$, $y = 0$, de donde $C' = 0$

para $x = l$, $y = 0$,

lo que da

$$0 = \frac{pl^4}{12} - \frac{pl^4}{24} + Cl$$

$$C = -\frac{pl^3}{24},$$

sustituyendo este valor en la ecuación (2) obtendráse

$$EIy = \frac{plx^3}{12} - \frac{px^4}{24} - \frac{pl^3x}{24}.$$

Entonces, y será máximo en el centro de la viga, para $x = \frac{l}{2}$, y este valor de y es la flexión que presenta la viga, la cual, finalmente, es

$$y_{max} = f = \frac{5pl^4}{384\,EI} = \frac{K}{I}.$$

Es decir, varía en razón inversa del momento de inercia I.

Notas. — Hemos estudiado este ejemplo para mostrar cómo se aplica la fórmula fundamental de la resistencia de materiales.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}.$$

Estúdianse de la misma forma las vigas cargadas de cualquier forma, así como los resortes: conociendo P, l y E y la flexión máxima y tolerada, la fórmula anterior da el momento de inercia I de la sección del metal, de donde se deducen las dimensiones de esta sección E, dependientes de la naturaleza del metal utilizado.

5.14. Problema XIV. Vibraciones de un árbol de máquina girando a gran velocidad. — Sea un árbol de máquina en reposo sobre dos «paliers» en sus extremos, siendo P su peso aplicado en el centro de este árbol (figura 36).

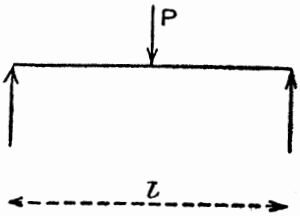


FIG. 36

Un cálculo exactamente igual al ejemplo anterior da la flexión de este árbol, que, evidentemente, es máximo en su centro, obteniéndose

$$f = \frac{Pl^3}{48\,EI}. \qquad (1)$$

Si bruscamente se ejerce sobre este árbol una fuerza vertical, la

flexión aumenta, ya que las fuerzas elásticas del metal del árbol tendrán como efecto volver la flexión a su valor inicial. Pero, a causa de la velocidad adquirida, la posición de equilibrio se sobrepasa y por ello está claro que habrá una serie de oscilaciones del árbol: esto hace vibrar en un plano vertical. Calculemos el período.

—Ya que una fuerza P produce una flexión $f = y$ dada por la fórmula (1), se deduce que una flexión de longitud $y = 1$ es producida por una fuerza

$$F = \frac{P}{y} = \frac{48\,EI}{l^3}$$

Por otra parte, esta fuerza que va a hacer vibrar el árbol es, evidentemente, proporcional a la flexión y en el instante considerado, y la ecuación fundamental del movimiento (en el plano vertical).

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum \text{ de las fuerzas}$$

da, colocados en un instante cualquiera

$$\frac{P}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = -Fy = -\frac{48\,EI}{l^3}y$$

con el signo —, ya que la fuerza elástica Fy actúa en sentido inverso de y. Por consiguiente, se tendrá

$$\frac{P}{g}\frac{d^2y}{dt^2} + Fy = 0.$$

cuya ecuación característica es

$$\frac{P}{g}r^2 + F = 0 \qquad \text{y} \qquad r = \pm j\sqrt{\frac{Fg}{P}}$$

La solución es sinusoidal, y poniendo

$$\beta = \sqrt{\frac{Fg}{P}},$$

se tendrá

$$y = K_1 \operatorname{sen} \beta t + K_2 \cos \beta t.$$

Contemos los tiempos a partir del momento en que la flexión es máxima y nula la velocidad

$$\frac{dy}{dt} = K_1\beta \cos \beta t - K_2\beta \operatorname{sen} \beta t = 0$$

de donde $K_1 = 0,$

resulta $y = K_2 \cos \beta t$

donde K_2 es la flexión máxima $\frac{Pl^3}{48\,EI}$.

Por consecuencia, el período T es

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt{\frac{Fg}{P}}$$

y la frecuencia es la inversa del período

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Fg}{P}}.$$

Si la causa exterior de las vibraciones actúa sincronizada con el movimiento de oscilación, habrá resonancia, y es ésta la velocidad crítica que puede llevar a la rotura del árbol. Tal resultado exterior justamente se produce por el peso P si el árbol gira a un número de revoluciones por segundo igual a

$$N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Fg}{P}},$$

el período de vibración propio del árbol es, por lo tanto, igual a la duración de rotación de este árbol.

5.15. Problema XV. Oscilaciones de una columna líquida (fig. 37). Sea un tubo en U de sección S conteniendo un líquido cualquiera.

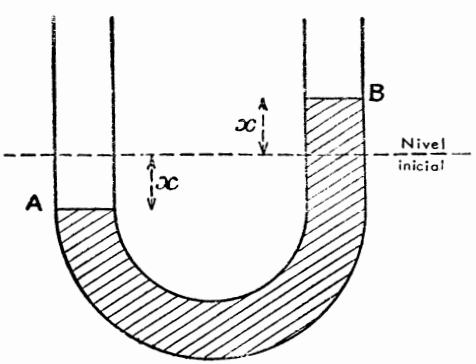


FIG. 37

Si se provoca una desnivelación x de un lado hacia abajo, el nivel sube en la misma cantidad x por el otro lado. El líquido va a ponerse en movimiento bajo la acción de la fuerza motriz, que es el peso de la columna de líquido de altura $2x$; y si δ es la masa del volumen del líquido y g la aceleración debida a la gravedad, esta fuerza es,

$$F = S2x \cdot \delta g.$$

Despreciando los frotamientos y llamando:

m, la masa total del líquido,

l, la longitud del tubo ocupado por el líquido,

se tiene

$$m = lS\delta,$$

—La ecuación fundamental del movimiento $m\gamma = F$ da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -S2\delta g$$

con el signo —, ya que la fuerza F se dirige en sentido inverso de x, pues hemos contado x a partir de la línea de arranque. Por consiguiente se tendrá la ecuación del movimiento

$$lS\delta\frac{d^2x}{dt^2} = -S2x\delta g$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g}{l}x - K^2x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K^2x = 0,$$

que es un movimiento sinusoidal, y se insiste, con respecto a la ecuación que se había obtenido en el cálculo del período de un péndulo, que el líquido oscila como un péndulo de longitud $\frac{l}{2}$.

La elongación es

$$x = x_0 \operatorname{sen}(Kt - \varphi)$$

y el período T es

$$T = \frac{2\pi}{K} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

independiente de la sección del tubo y de δ, por consiguiente de la naturaleza del líquido. Pero no sería lo mismo si no se hubiese tenido en cuenta la amortiguación producida por el frotamiento del líquido en el tubo.

5. 16. Problema XVI. Sean dos conductores verticales y paralelos colocados en un campo magnético de inducción B perpendicular al plano de la figura. Están enlazados en sus bases por una resistencia R. Sobre la longitud de estos conductores se desliza una barra AB de masa m (fig. 38). **Hallar la ley de la caída de este conductor (se despreciará la resistencia óhmica de la barra y de los dos hilos).**

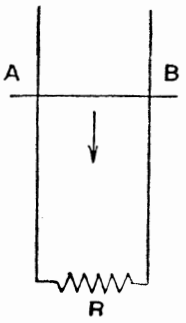


FIG. 38

—Sea l la desviación de los dos conductores. Se sabe que, en la barra, aparece una fuerza electromotriz de inducción, y si v es la velocidad de la barra, tiene por valor

$$e = \mathrm{B}lv.$$

Despreciando la inductancia del circuito la corriente será igual a

$$i = \frac{e}{\mathrm{R}}$$

Por consiguiente, sobre la barra colocada en el campo B, aparece una fuerza electromagnética F dada por la ley de LAPLACE

$$\mathrm{F} = \mathrm{B}il = \frac{\mathrm{B}^2l^2v}{\mathrm{R}}$$

dirigida en sentido inverso al movimiento, a causa de la ley de LENZ.

La ecuación fundamental del movimiento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum \text{de las fuerzas}$$

da, llamando x al espacio recorrido al cabo del tiempo t, y siendo P el peso de la barra

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{P} - \mathrm{F}$$
$$= mg - \frac{\mathrm{B}^2l^2v}{\mathrm{R}}$$

o

$$\mathrm{R}m\frac{dv}{dt} + \mathrm{B}^2l^2v = mg\mathrm{R},$$

ecuación de la forma

$$\mathrm{A}\frac{dy}{dx} + \mathrm{D}y = \mathrm{C}.$$

La integración es fácil separando variables, y, suponiendo que la velocidad inicial sea nula, poniendo

$$\alpha = \frac{B^2 l^2}{Rm}$$

se obtiene finalmente

$$v = \frac{g}{\alpha}(1 - e^{\alpha t}) \qquad (1)$$

que tiende al calor constante $V = \frac{g}{\alpha}$.

Integrando la ecuación (1) se obtendrá la ley del espacio recorrido

$$x = f(t).$$

5. 17. Problema XVII. Estudio matemático detallado de la descarga de un condensador eléctrico en una bobina de inductancia.

— Este estudio es interesante desde varios puntos de vista: en primer lugar desde el punto de vista estrictamente matemático; después desde el radioeléctrico, y por último se encuentra en un gran número de fenómenos oscilatorios cada vez que hay amortiguación, por ejemplo, el movimiento de un cuadro de un galvanómetro, el movimiento de un navío, las vibraciones de un resorte, etcétera

— Vamos a estudiar aquí el famoso circuito oscilante que es la base de todos los circuitos de Radio. Supongamos un condensador eléctrico de capacidad C que ha sido cargado con una diferencia de potencial V, posee una carga eléctrica

$$Q = C \cdot V \qquad \begin{pmatrix} C \text{ en faradios} \\ V \text{ en voltios} \\ Q \text{ en culombios} \end{pmatrix}$$

y una energía potencial

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \qquad (W \text{ en julios})$$

que se manifestará por un desprendimiento de calor durante la descarga.

Descarguemos este condensador en una bobina en la cual la resistencia óhmica es R y la inductancia se designa por L.

Representación por una ecuación. — Coloquémonos en un instante cualquiera de la descarga (suponemos, en efecto, que C está descargándose), y llamemos (fig. 39):

i la intensidad de la corriente en este momento, en el circuito,

q la carga que queda en este momento en el condensador,

v la diferencia de potencial entre los bornes de C, que no es igual a V, pero se tiene $v = \frac{q}{C}$.

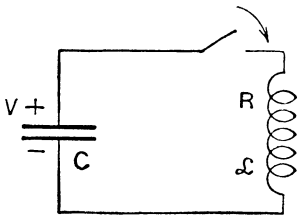


FIG. 39

Durante un tiempo dt, el condensador pierde una carga dq y se tiene $dq = -idt$, con signo —, ya que dq disminuye (en efecto, cuando una función q disminuye, su diferencial dq es negativa).

Por otra parte, ya que i varía en di, el flujo en la bobina varía en $d\Phi = L\,di$, y se sabe que aparece una fuerza contraelectromotriz de inducción (Ley de LENZ) en la que el valor instantáneo es

$$e = -L\frac{di}{dt}.$$

Apliquemos ahora la ley de KIRCHHOFF

$$i = \frac{\sum \text{de las f.e.m.}}{\sum \text{de las R}} = \frac{v + e}{R}$$

$$= \frac{v - L\dfrac{di}{dt}}{R}$$

o

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v = \frac{q}{C}, \qquad (1)$$

pero se tiene

$$i = -\frac{dq}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}.$$

lo que da

$$-L\frac{d^2q}{dt^2} - R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \qquad (2)$$

Antes hagamos intervenir la diferencia de potencial v: tendremos

$$q = Cv$$

y, derivando

$$\frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d^2q}{dt^2} = C\frac{d^2v}{dt^2}.$$

La ecuación (2) se convierte entonces en

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + \frac{Cv}{C} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0}$$

Pongamos, para simplificar la escritura

$$\frac{R}{2L} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{1}{LC} = \Omega^2$$

de donde la ecuación fundamental

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} v\Omega^2 = 0} \qquad (3)$$

Ecuación diferencial de segundo orden, lineal, con coeficientes constantes α y Ω^2, y sin segundo miembro.

Resolución. — La ecuación característica es

$$a^2 + 2\alpha a + \Omega^2 = 0 \qquad (4)$$

de la que las raíces son

$$a_1 \text{ y } a_2 = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\Omega^2}}{2}.$$

Puede hacerse hincapié, con respecto a la ecuación (4), que el producto de las raíces es positivo (Ω^2) y que su suma es siempre negativa (-2α), así se tendrán dos raíces *negativas*:

$$a_1 \text{ y } a^2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \Omega^2}.$$

Habrá tres casos, según el signo de $\alpha^2 - \Omega^2$.

Primer caso. $\boxed{\alpha^2 - \Omega^2 > 0}$. Existen dos raíces reales.

Se tiene

$$\alpha > \Omega$$

$$\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad \boxed{R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Entonces, pongamos para simplificar la escritura,

$$\alpha^2 - \Omega^2 = m^2, \quad \text{(un cuadrado es siempre} > 0).$$

Las raíces a_1 y a_2 serán

$$\left| \begin{array}{l} a_1 = -\alpha + m = m - \alpha \\ a_2 = -\alpha - m = -(m + \alpha). \end{array} \right.$$

Por consiguiente, la solución es, llamando A y B las constantes de integración,

$$v = Ae^{(m-\alpha)t} + Be^{-(m+\alpha)t},$$

e

$$i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{dv}{dt}$$

$$= -C[A(m-\alpha)e^{(m-\alpha)t} - B(m+\alpha)e^{-(m+\alpha)t}].$$

Cálculo de las constantes

Las condiciones iniciales son, para $t = 0$:

$$v = V \quad \text{e} \quad i = 0$$

ya que $i = -C\frac{dV}{dt}$, y V es grande, y varía poco al principio

$$V = C^{te} \quad \text{para} \quad t = 0.$$

Sustituyamos en v e i, lo que da

$$\left| \begin{array}{l} V = A + B \\ 0 = -C[A(m-\alpha) - B(m+\alpha)], \end{array} \right.$$

o

$$\left| \begin{array}{l} A + B = V \\ A(m-\alpha) - B(m+\alpha) = 0, \end{array} \right.$$

de donde se obtiene A y B por los determinantes

$$A = \frac{\begin{vmatrix} V & 1 \\ 0 & -(m+\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (m-\alpha & -(m+\alpha) \end{vmatrix}} = \frac{-V(m+\alpha)}{-(m+\alpha)-(m-\alpha)} = \frac{V(m+\alpha)}{2m}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & V \\ m-\alpha & 0 \end{vmatrix}}{-2m} = \frac{V(m-\alpha)}{2m}$$

Lo mismo se tendrá

$$v = \frac{V}{2m}[(m+\alpha)e^{(m-\alpha)t} + (m-\alpha)e^{-(m+\alpha)t}]$$

e

$$i = -\frac{V}{2m}C[(m+\alpha)(m-\alpha)e^{(m-\alpha)t} - (m-\alpha)(m+\alpha)e^{-(m+\alpha)t}],$$

ahora bien

$$m^2 - \alpha^2 = -\Omega^2,$$

lo que da

$$i = \frac{VC\Omega^2}{2m}[e^{(m-\alpha)t} - e^{-(m+\alpha)t}]$$

expresión en la que $(m-\alpha)$ *y* $-(m+\alpha)$ *son negativos.*

También puede escribirse i en la forma

$$i = -\frac{VC\Omega^2}{2m}[e^{-(\alpha+m)t} - e^{-(\alpha-m)t}],$$

y como se tiene

$$i = -C\frac{dv}{dt}$$

se ve que, si v crece, dv es positivo e i es negativo, v e i son, por consiguiente, de signos contrarios.

Trazado de las curvas. — Como v es la suma de dos exponenciales decrecientes, la curva de v será también de tipo decreciente.

Para $t = \infty$, $v = 0$, y para $t = 0$, $v = V$, la derivada $\frac{dv}{dt}$ es proporcional a i $\left(i = -C\frac{dv}{dt}\right)$, y para $t = 0$ se ve que $i = 0$, por con-

siguiente, para la curva de v la tangente es *horizontal* en el origen, obteniéndose la curva de la figura 40.

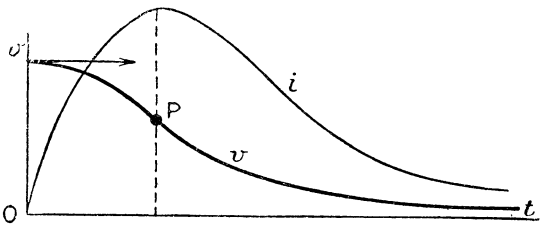


FIG. 40

Tracemos la curva de i:

para $t = 0$, $i = 0$ y para $t = \infty$, $i = 0$.

La derivada es

$$i' = -\frac{VC\Omega^2}{2m}[-(\alpha + m)e^{-(\alpha+m)t} + (\alpha - m)e^{-(\alpha-m)t}]$$

que, para $t = 0$, da

$$i' = -\frac{VC\Omega^2}{2m}[-(\alpha + m) + (\alpha - m)]$$

$$= -\frac{VC\Omega^2}{2m}(-2m) = VC\Omega^2$$

que da la tangente en el origen: no es nula ni infinito.

También puede escribirse

$$i = -\frac{VC\Omega^2}{2m}(e^{-\alpha t} \cdot e^{-mt} - e^{-\alpha t} \cdot e^{mt})$$

$$= -\frac{VC\Omega^2}{2m}e^{-\alpha t}(e^{-mt} - e^{mt}),$$

Trazando ahora las curvas de dos exponenciales decrecientes puede afirmarse que *su diferencia pasa por un máximo*. En efecto, anulemos la derivada anulando el corchete de la ecuación i' escrita antes:

$$0 = -(\alpha + m)e^{-(\alpha+m)t} + (\alpha - m)e^{-(\alpha-m)t}$$

o
$$(\alpha - m)e^{-(\alpha-m)t} = (\alpha + m)e^{-(\alpha+m)t}$$
$$\frac{e^{(\alpha+m)t}}{e^{(\alpha-m)t}} = \frac{\alpha + m}{\alpha - m}$$

o
$$e^{2mt} = \frac{\alpha + m}{\alpha - m}$$
$$2mt = \text{Log}\frac{\alpha + m}{\alpha - m}$$
$$t = \frac{1}{2m}\text{Log}\frac{\alpha + m}{\alpha - m}$$

lo que da la abscisa del máximo de i (fig. 40).

Así, cosa curiosa, v decrece lentamente y, sin embargo, i pasa por un máximo, viéndose fácilmente que este máximo se da en el punto de inflexión de $v(v'' = 0)$.

En resumen, la descarga es *aperiódica y continua.*

Segundo caso. $\boxed{\alpha^2 - \Omega^2 = 0}$. La ecuación característica tiene una raíz doble. Se tiene

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{y} \quad \boxed{R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

es ésta la resistencia crítica, siempre muy grande en radio, superior a 1.000 ohmios. En efecto, en los buenos circuitos de radio, la relación $\frac{L}{C}$ es siempre superior a 400.000; tomemos hasta 16^6, de donde

$$R = 2\sqrt{10^6} = 2.000 \text{ ohmios.}$$

Las raíces de la ecuación característica se reducen a

$$a_1 = a_2 = -\alpha,$$

y, en este caso, la solución es

$$v = e^{at}(A + Bt) = e^{-\alpha t}(A + Bt)$$

e
$$i = -\frac{C dv}{dt} = -C[(A + Bt)(-\alpha)e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}B].$$

Se calculará fácilmente A y B como se ha hecho antes, bajo las mismas condiciones iniciales, y se obtendrá

$$\boxed{\begin{aligned} v &= Ve^{-\alpha t}(1 + \alpha t) \\ i &= CV\alpha^2 te^{-\alpha t} \end{aligned}}$$

Las curvas tienen la misma forma que en el primer caso, como se ve fácilmente tomando valores particulares:

$$\text{para} \quad t = 0 \quad v = V \qquad \text{e} \qquad i = 0$$

$$\text{para} \quad t = \infty \quad v = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{de donde} \quad \frac{N'}{D'} = \frac{\alpha}{\alpha e^{\alpha t}} = 0$$

$$i = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{de donde} \quad \frac{N'}{D'} = \frac{1}{\alpha e^{\alpha t}} = 0.$$

Anulemos i'

$$i' = CV\alpha^2[e^{-\alpha t} + t(-\alpha)e^{-\alpha t}] = 0$$

$$1 - \alpha t = 0 \qquad \text{y} \qquad t = \frac{1}{\alpha},$$

que es también un máximo de i, ya que i parte y vuelve a cero. Podrá verse que este máximo se da en el punto de inflexión de v.

Finalmente, puede insistirse en que este valor de $t = \frac{1}{\alpha}$ es *inferior* al que se ha obtenido en el primer caso, por consiguiente, este segundo caso corresponde a la descarga del condensador en el tiempo *mínimo*.

Tercer caso. $\boxed{\alpha^2 - \Omega^2 < 0}$. La ecuación característica tiene raíces imaginarias. Se tiene

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC} \qquad \text{y} \qquad \boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Pongamos

$$\Omega^2 - \alpha^2 = m^2, \qquad (\text{ya que } \Omega^2 > \alpha^2)$$

y las raíces a se escriben

$$a_1 = -\alpha + jm \qquad \text{y} \qquad a_2 = -\alpha - jm.$$

La solución es entonces

$$v = e^{-\alpha t}\,(\mathrm{M}\cos mt + \mathrm{N}\operatorname{sen} mt)$$

e

$$\begin{aligned} i &= -\mathrm{C}\frac{dv}{dt} \\ &= -\mathrm{C}[(\mathrm{M}\cos mt + \mathrm{N}\operatorname{sen} mt)(-\alpha)e^{-\alpha t} + \\ &\qquad + e^{-\alpha t}(-\mathrm{M}m\operatorname{sen} mt + \mathrm{N}m\cos mt)] \\ &= -\mathrm{C}e^{-\alpha t}[(\mathrm{N}m - \mathrm{M}\alpha)\cos mt - (\mathrm{N}\alpha + \mathrm{M}m)\operatorname{sen} mt]. \end{aligned}$$

Cálculo de las constantes M *y* N.

Para $t = 0$, $v = \mathrm{V}$ e $i = 0$ $\left(\text{en efecto } i_0 = -\mathrm{C}\frac{d\mathrm{V}}{dt}\right)$

lo que da, sustituyendo en v e i

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{V} = \mathrm{M} \\ \mathrm{O} = -\mathrm{C}[(\mathrm{N}m - \mathrm{M}\alpha)] \end{array}\right.$$

de donde

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{M}\alpha}{m} = \frac{\mathrm{V}\alpha}{m},$$

lo que da

$$v = \mathrm{V}e^{-\alpha t}\left(\cos mt + \frac{\alpha}{m}\operatorname{sen} mt\right).$$

Si se pone $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{m}{\alpha}$, se deduce

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{m}{\sqrt{m^2 + \alpha^2}} = \dfrac{m}{\Omega} \\ \cos\varphi = \dfrac{\alpha}{\sqrt{m^2 + \alpha^2}} = \dfrac{\alpha}{\Omega}, \end{array}\right.$$

de donde

$$\left|\begin{array}{l} v = \mathrm{V}e^{-\alpha t}\left(\dfrac{\operatorname{sen}\varphi\cos mt + \cos\varphi\operatorname{sen} mt}{\operatorname{sen}\varphi}\right) \\ \quad = \mathrm{V}\dfrac{\Omega}{m}e^{-\alpha t}\operatorname{sen}(mt + \varphi) \\ i = \dfrac{\mathrm{CV}\Omega^2}{m}e^{-\alpha t}\operatorname{sen} mt. \end{array}\right.$$

Pero, en general, α^2 *es mucho más pequeño que* Ω^2, por lo que también puede escribirse

$$m^2 = \Omega^2 - \alpha^2 \approx \Omega^2 \qquad \text{y} \qquad m \approx \Omega,$$

en consecuencia, $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\Omega}{\alpha}$ es casi infinito y φ, aproximadamente igual a $\dfrac{\pi}{2}$, y como

$$\cos mt = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - mt\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + mt\right),$$

se obtiene por fin

$$\boxed{\begin{aligned} v &= Ve^{-\alpha t} \operatorname{sen}\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= Ve^{-\alpha t} \cos \Omega t, \\ i &= CV\Omega e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \Omega t \end{aligned}}$$

que son las ecuaciones buscadas, las cuales muestran que se trata de una descarga sinusoidal amortiguada (fig. 41).

La descarga es oscilante, en este caso.

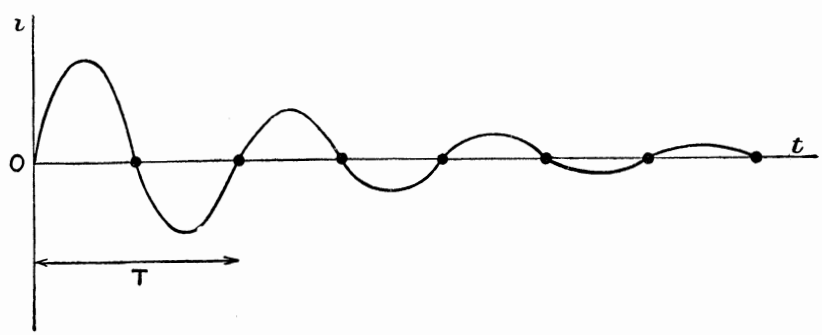


FIG. 41

Trazado de las curvas. — Se ve que v está desfasada en $\dfrac{\pi}{2}$ (o un cuarto de período) sobre i.

La tensión v y la corriente i pasan por una serie de máximos, pero cada uno de ellos es cada vez menor, y estos máximos están sobre la curva $e^{-\alpha t}$.

Busquemos los máximos de i, anulando $\frac{di}{dt}$:

$$\frac{di}{dt} = CV\Omega\,(-\alpha e^{-\alpha t}\,\text{sen}\,mt + e^{-\alpha t}\,\Omega\cos mt) = 0$$

$$-\alpha\,\text{sen}\,mt + \Omega\cos mt = 0$$

$$\text{tg}\,mt = \frac{\Omega}{\alpha},$$

estos máximos o mínimos son, por lo tanto, equidistantes entre sí, ya que la función tg mt es periódica.

La corriente i se anula para los valores de t tales que sen $mt = 0$. Siendo periódica esta función, tales puntos son equidistantes también. Se deduce

$$mt = 0 \qquad \text{o} \qquad K\pi$$

$$t = \frac{K\pi}{m} = \frac{K\pi}{\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}}$$

El período se obtiene haciendo $K = 2$ (es decir, al cabo del segundo máximo), de donde

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}}$$

Esta es la fórmula exacta obtenida por William THOMSON.

En la práctica, $\alpha^2 << \Omega^2$, y queda

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}}$$

L en henrys,
C en faradios,
T en segundos.

La frecuencia puede variar entre algunos «hertz» hasta varias decenas de millares de «megahertz» (1 MHz = 1.000 kHz).

Los ceros de la intensidad tienen lugar para

$$mt = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \text{etc.},$$

mientras que los máximos existen para

$$\text{tg}\,mt = \frac{\Omega}{\alpha} \approx \infty$$

de donde

$$mt \approx \frac{\pi}{2}.$$

por consiguiente, los máximos de i *no están en medio del semiperíodo, sino un poco antes.* Es preciso además que sea así para que, de esta forma, ver el momento del semiperíodo en que la curva i sea tangente a la exponencial $e^{-\alpha t}$.

Se obtiene de esta forma la curva de la figura 42.

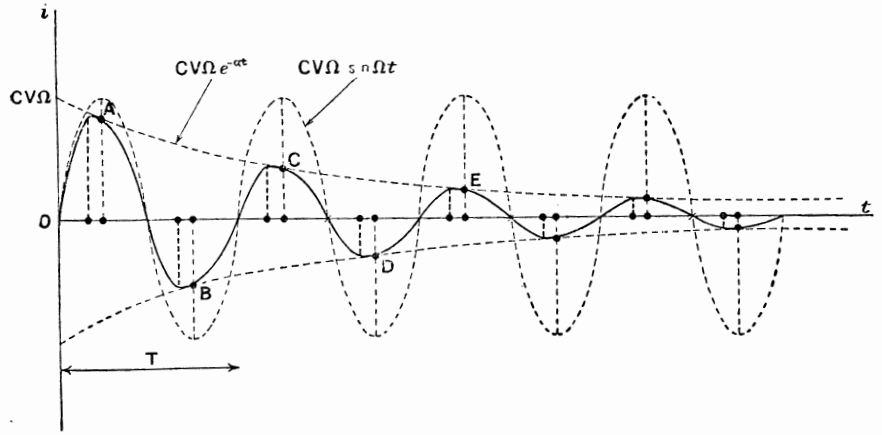


FIG. 42

En los puntos A, B, C y D que corresponden a la mitad de los arcos de la sinusoide sen Ωt, es fácil ver que la curva amortiguada de la corriente es tangente a la exponencial

$$I = CV\Omega e^{-\alpha t}.$$

En efecto, la curva amortiguada

$$i = CV\Omega e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \Omega t$$

posee la misma amplitud que I para $\Omega t = \frac{\pi}{2}$.

La tangente en A, B, C, D, tiene como valor, para la curva de la corriente

$$\frac{di}{dt} = CV\Omega \left[-\alpha e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \Omega t + e^{-\alpha t} \Omega \cos \Omega t \right]$$

y para $\Omega t = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{di}{dt} = CV\Omega \left(-\alpha e^{-\alpha t} + 0 \right) = -\alpha CV\Omega e^{-\alpha t}$$

Ahora bien, este valor es el mismo que el de la tangente a la curva de I, En efecto

$$\frac{dI}{dt} = CV\Omega(-\alpha)e^{-\alpha t}$$

Al final se ve que las amplitudes decrecen más rápidamente cuanto mayor es $\alpha = \frac{R}{2L}$, por lo que α ha sido *denominado coeficiente* de amortiguación del circuito oscilante.

La cantidad Ω, coeficiente de t en el seno, es la pulsación propia del circuito oscilante

$$\boxed{\Omega \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T}}$$

y *la frecuencia propia* f del circuito oscilante es $f = \frac{1}{T}$.

Se insiste en que

$$\Omega^2 = \frac{1}{LC}$$

de donde

$$\boxed{LC\,\Omega^2 = 1}$$

fórmula que se parece a la de la resonancia de los circuitos de recepción. Aquí, en efecto, no se trata de resonancia, ya que es un circuito que oscila espontáneamente, esto es un generador de oscilaciones amortiguadas.

Se sabe que tal circuito, conectado convenientemente con una lámpara amplificadora, dará oscilaciones sostenidas de amplitud constante, que estudiaremos luego.

Se puede insistir en que, en la descarga amortiguada, la amplitud máxima de la primera oscilación es

$$I_{max} = CV\Omega$$

y, como V y Ω son muy grandes, esta intensidad puede alcanzar, en las emisoras de radio, varias decenas de millares de amperios.

Ejemplo.

$C = 7 \cdot 10^{-7}$ faradios. $L = \frac{1}{7 \cdot 10^5}$ henrys. $R = 0{,}05$ ohmios.

Se tiene

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 17.500$$

$$T = \frac{1}{150.000} \text{ de segundo}$$

y, si V = 80.000 voltios, se obtiene para la primera amplitud máxima

$$¡I = 56.000 \text{ amperios!}$$

pero al cabo de 115 oscilaciones (es decir al cabo de $\frac{1}{1.300}$ de segundo) la amplitud se reduce a $\frac{1}{2}$ amperio, es decir $\frac{1}{100.000}$ de su valor inicial.

Amortiguación de oscilaciones

Hagamos la relación de dos amplitudes distantes de un período

$$i_t = Ie^{-\alpha t} \operatorname{sen} \Omega t$$

e

$$i_{t+T} = Ie^{-\alpha(t+T)} \operatorname{sen} \Omega(t + T),$$

lo que da

$$\frac{i_t}{i_{t+T}} = \frac{Ie^{-\alpha t} \operatorname{sen} \Omega t}{Ie^{-\alpha(t+T)} \operatorname{sen} \Omega(t + T)}$$

ahora bien, los senos son iguales, quedando

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha t} e^{-\alpha T}} = e^{\alpha T} = \textit{constante},$$

y por ello, dos máximos sucesivos decrecen en progresión geométrica, de razón $e^{\alpha T}$.

Tomemos logaritmos neperianos

$$\alpha T = \operatorname{Log} \frac{i_1}{i_2};$$

esta cantidad se llama decremento logarítmico δ

$$\boxed{\alpha T = \delta}$$

que caracteriza la rapidez de decrecimiento de las oscilaciones.

Puede escribirse

$$\delta = \alpha \cdot \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{\frac{L\Omega}{R}},$$

En la práctica, los radiotécnicos designan por Q la cantidad $\frac{L\Omega}{R}$ (o *coeficiente de sobretensión*), obteniéndose así la curiosa fórmula

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{Q}}$$

Es preciso insistir en que $\delta = \alpha T$ es número puro, sin dimensión, es decir, un coeficiente (una característica del circuito oscilante).

En la práctica, Q varía desde 100, para los circuitos malos, hasta 500 para los circuitos muy buenos de radio. Sin embargo, con cavidades resonantes, se llega a Q = 10.000 y más incluso, esto con ondas de muy alta frecuencia del Radar, donde se utilizan frecuencias que llegan hasta 10.000 e incluso 30.000 megaciclos/seg, lo que corresponde a longitudes de onda de 3 cm. y hasta 1 cm, producidas por magnetrones en cavidades resonantes.

5. 18. Problema XVIII. Analogía mecánica. — Sea un cuerpo de masa m ligado a un punto fijo por medio de un resorte, colocado en un medio viscoso. Si se desvía el cuerpo de su posición de equilibrio, vuelve al mismo después de una serie de oscilaciones amortiguadas o periódicas. Llamemos x la elongación del móvil en un instante t cualquiera, y supongamos que la resistencia debida al fluido sea proporcional a la velocidad, es decir, una fuerza retardatriz de la forma $r\frac{dx}{dt}$, donde r es el coeficiente de frotamiento.

Por otra parte, la fuerza elástica debida al resorte es, evidentemente, proporcional al desplazamiento x, sea $F_1 = Kx$. Se tendrá, pues, aplicando la fórmula fundamental de la Mecánica y escribiendo que la suma algebraica de todas las fuerzas es nula, comprendida la fuerza de inercia $m\frac{d^2x}{dt^2}$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + Kx = 0.$$

Comparando con la ecuación estudiada antes

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

se observa que a la carga q corresponde la elongación x; a la corriente $i = \frac{dq}{dt}$ corresponde la velocidad $v = \frac{dx}{dt}$; a la resistencia óhmica R el coeficiente de frotamiento; a la inductancia L la masa m del cuerpo, y a la capacidad $C = \frac{1}{K}$, donde K es en realidad el coeficiente de elasticidad.

Finalmente, a la energía electromagnética $\frac{1}{2}Li^2$ de la bobina, corresponde la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ Hay analogía completa entre estos fenómenos eléctricos y mecánicos.

Dada la importancia de este problema, precisemos un poco los cálculos.

Partimos de la ecuación $m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + Kx = 0$, que escribiremos, para simplificar los cálculos que siguen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + b^2x = 0.$$

Resolución.

La ecuación característica es

$$a^2 + 2a\alpha + b^2 = 0,$$

de donde los dos valores de a:

$$a_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - b^2}$$

y

$$a_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - b^2}.$$

Por consiguiente, la solución es:

$$x = Ae^{a_1 t} + Be^{a_2 t}.$$

Casos particulares.

Primer caso: $\alpha > b$, por ejemplo $\alpha = 3$ y $b^2 = 8$.

Se obtiene

$$a = -3 \pm 1 = -4 \text{ y } -2,$$

de donde

$$x = Ae^{-2t} + Be^{-4t}.$$

donde A y B vienen dadas por las condiciones iniciales o finales.

Por ejemplo, si, para $t = 0$, $x = 0$ y $v = 8$, se tendrá:

$$v = \frac{dx}{dt} = -2Ae^{-2t} - 4Be^{-4t}$$

de donde

$$8 = -2A - 4B,$$

y para x:

$$0 = A + B.$$

De estas dos ecuaciones se obtiene $A = 4$ y $B = -4$, de aquí la solución:

$$x = 4(e^{-2t} - e^{-4t}).$$

Se tendrá la figura 43 *a*.

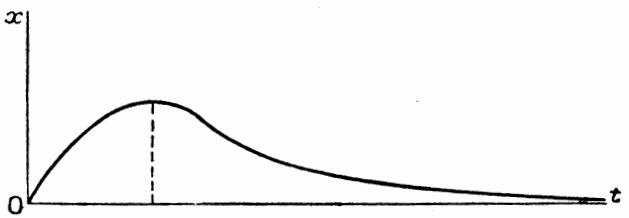


FIG. 43 *a*

Segundo caso: $a = b$, por ejemplo $a = b = 2$, de donde

$$a_1 = a_2 = -2,$$

y la solución es

$$x = e^{-2t}(A + Bt).$$

Por ejemplo, si, para $t = 0$, se tiene $x = 0$ y $v = 10$, se obtiene:

$$v = \frac{dx}{dt} = -2e^{-2t}(A + Bt) + Be^{-2t}$$

que, para $t = 0$, da

$$0 = A \quad \text{y} \quad 10 = B,$$

de donde

$$x = 10te^{-2t}$$

lo que da la curva de la figura 43 b.

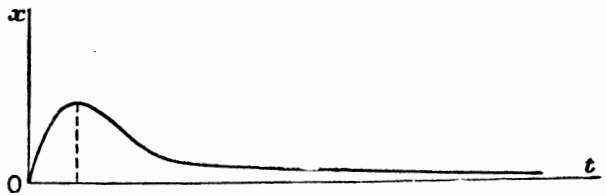


FIG. 43 b

Podrá verse que la abscisa del máximo es menor que en el primer caso.

Tercer caso: $a < b$, por ejemplo $a = 1$, $b^2 = 10$. Se tiene en este caso

$$\begin{aligned} a &= -1 \pm \sqrt{-9} \\ &= -1 \pm 3j, \end{aligned}$$

de donde la solución

$$\begin{aligned} x &= Ae^{(-1+3j)t} + Be^{(-1-3j)t} \\ &= e^{-t}(Ae^{3jt} + Be^{-3jt}) \\ &= e^{-t}(C \cos 3t + D \operatorname{sen} 3t) \end{aligned}$$

donde C y D son constantes que dependen de las condiciones iniciales o finales de cada caso particular

Puede escribirse también en la forma: $x = Me^{-t} \operatorname{sen} (3t - \varphi)$, siendo el período $T = \dfrac{2\pi}{3}$, con $\omega = 3$.

Por ejemplo, si, para $t = 0$, $x = 0$ y $v = 9$, se obtiene

$$v = \frac{dx}{dt} = -e^{-t}(C \cos 3t + D \operatorname{sen} 3t) + e^{-t}(-3C \operatorname{sen} 3t + 3D \cos 3t),$$

y, para $t = 0$, resulta:

para x: $\quad 0 = C$

para v: $\quad 9 = 3D \quad$ y $\quad D = 3.$

La solución será entonces

$$x = 3e^{-t} \operatorname{sen} 3t,$$

cuya curva es la indicada en la figura 43 *c*: es una sinusoide amortiguada, cuyo período es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}.$$

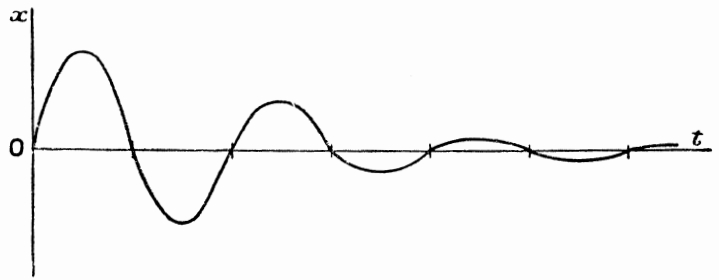


FIG. 43 c

5. 19. Problema XIX. Vibraciones forzadas.

Se ha visto que la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + b^2x = 0$$

representa una vibración sinusoidal amortiguada cuando $a < b$.

Supongamos que el sistema oscilante ahora esté sometido a una causa exterior oscilante de pulsación ω: las oscilaciones no serán más amortiguadas, serán mantenidas, y, si ω es igual a la pulsación *propia* del sistema oscilante, *habrá resonancia* y la amplitud x tendrá un valor muy grande, *incluso si el resultado oscilante es muy débil.*

Dada la importancia considerable de este fenómeno en Mecánica, insistimos más en el mismo.

En el caso general, cuando las vibraciones propias del cuerpo no se extinguen (al cabo de algunos períodos), el cuerpo vibrará ahora a la pulsación ω de la fuente exterior, que va a «forzar», manteniendo las oscilaciones e imponiendo su frecuencia.

La ecuación diferencial se transforma en:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + b^2x = C \operatorname{sen} \omega t.$$

Por consiguiente, deberá tenerse:

$$x = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$$

o

$$= D \operatorname{sen} (\omega t - \varphi),$$

y este valor satisfará la ecuación diferencial.

Se tendrá:

$$\frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t - B\omega \operatorname{sen} \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t - B\omega^2 \cos \omega t.$$

Lo que dará:

$$C \operatorname{sen} \omega t = (-A\omega^2 \operatorname{sen} \omega t - B\omega^2 \cos \omega t) + \\ + 2\alpha(A\omega \cos \omega t - B\omega \operatorname{sen} \omega t) + b^2(A \operatorname{sen} \omega t + B \operatorname{sen} \alpha t)$$

$$= (-A\omega^2 - 2\alpha\omega B + b^2 A) \operatorname{sen} \omega t + (-\omega^2 B + 2\alpha\omega A + b^2 B) \cos \omega t$$

Identifiquemos, ya que esta igualdad debe existir en cada instante, sea cual sea t:
coeficientes del seno:

$$(b^2 - \omega^2)A - 2\alpha\omega B = C \qquad (1)$$

coeficientes del coseno:

$$2\alpha\omega A + (b^2 - \omega^2)B = 0. \qquad (2)$$

Multipliquemos la primera por $(b^2 - \omega^2)$:

$$A(b^2 - \omega^2)^2 - 2\alpha\omega B(b^2 - \omega^2) = C(b^2 - \omega^2), \qquad (3)$$

y la segunda por $2\alpha\omega$:

$$4\alpha^2\omega^2 A + 2\alpha\omega(b^2 - \omega^2)B = 0. \qquad (4)$$

Sumemos las ecuaciones 4 y 3, resultando:

$$[(b^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]A = C(b^2 - \omega^2),$$

de donde

$$A = \frac{C(b^2 - \omega^2)}{(b^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$$

lo que da B, de la ecuación 4:

$$B = -\frac{2\alpha\omega A}{b^2 - \omega^2}$$

$$= -\frac{2\alpha\omega C}{(b^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}.$$

Por consiguiente, de esta forma se indica el cálculo de A y B.

Ejemplo. — Sea $\alpha = 2$, $b = 3$, $l = 3$ y $\omega = 2$. Se tendrá la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 9x = 3 \operatorname{sen} 2t,$$

con

$$x = A \operatorname{sen} 2t + B \cos 2t,$$

$$\frac{dx}{dt} = 2A \cos 2t - 2B \operatorname{sen} 2t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4A \operatorname{sen} 2t - 4B \cos 2t.$$

Lo que dará:

$$3 \operatorname{sen} 2t = (-4A - 8B + 9A) \operatorname{sen} 2t + (-4B + 8A + 9B) \cos 2t,$$

de donde, identificando:

$$\begin{cases} 5A - 8B = 4 \\ 8A + 5B = 0, \end{cases}$$

de donde se obtiene

$$A = \frac{15}{89} \quad \text{y} \quad B = -\frac{24}{89}$$

Por consiguiente, la solución es, para la amplitud instantánea de la vibración:

$$x = \frac{15}{89} \operatorname{sen} 2t - \frac{24}{89} \cos 2t$$

$$= \frac{3}{89} (5 \operatorname{sen} 2t - 8 \cos 2t),$$

o bien

$$x = \frac{3}{\sqrt{89}} \operatorname{sen} (2t - \varphi)$$

con $\operatorname{tg} \varphi = \frac{8}{5}$.

El período será

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ segundos.}$$

5.20. Problema XX. Aplicación al cuadro móvil de los aparatos de medida eléctricos.

También podemos aplicar las consideraciones anteriores al estudio del cuadro de un aparato de medidas eléctricas (balístico u otro), suspendido por un hilo de torsión o colocado sobre dos pivotes y provisto de dos resortes espirales oponiéndose a la rotación.

Llamemos:

I el momento de inercia del equipo móvil con respecto al eje,

θ el ángulo de rotación al cabo de un tiempo t,

K una constante que depende de la amortiguación del cuadro (debida a la resistencia del aire así como al efecto retardatriz causado por las corrientes de FOUCAULT),

C una constante que depende de la torsión del hilo o de los resortes espirales.

— Hay dos causas que se oponen al movimiento:

1.° el par de torsión del hilo o de los resortes, que es proporcional al ángulo θ, sea $C\theta$,

2.° una amortiguación debida al aire, o a una causa eléctrica, y que es proporcional a la velocidad de rotación $\frac{d\theta}{dt}$ del cuadro.

— La fórmula fundamental de la Mecánica para los cuerpos en revolución (demostrada al principio del Tomo IV).

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \sum \text{ de los momentos de las fuerzas motrices y retardatrices.}$$

nos da

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\frac{d\theta}{dt} - C\theta,$$

obteniéndose entonces la ecuación clásica

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + K\frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0,$$

que da el valor del ángulo $\theta = f(t)$.

Si $4IC > K^2$, *la solución es sinusoidal,* y poniendo

$$\Omega^2 = \frac{C}{I} - \frac{K^2}{4I^2} \qquad y \qquad \alpha = \frac{K}{2I}$$

se obtiene, como solución de la ecuación diferencial,

$$\theta = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \Omega t + C_2 \operatorname{sen} \Omega t)$$
$$\theta = \theta_0 e^{-\alpha t} \operatorname{sen} (\Omega t - \varphi),$$

exactamente como para la descarga oscilante de un condensador en una bobina de inductancia.

Si $4IC < K^2$, se obtiene una suma de dos exponenciales, el sistema no es periódico, y el movimiento es continuo.

5.21. Problema XXI. Acción de una f.e.m. continua sobre un circuito eléctrico. — *Sea un circuito eléctrico comprendiendo en serie una inductancia* $L = 0{,}05$ H, *resistencia* $R = 20\ \Omega$, *y un condensador de capacidad* $C = 100\ \mu F$, *con una f.e.m.* $E = 100$ *voltios. Calcular la intensidad i de la corriente y la carga q en el condensador, en función del tiempo t, con las condiciones iniciales siguientes: para* $t = 0$, $i = 0$ *y* $q = 0$ (fig. 44).

— Basta partir de la ecuación 2 del problema XVII estudiada antes. Se tendrá en un instante cualquiera (dado que la diferencia de potencial entre los bornes de C actúa como una fuerza contraelectromotriz, ya que C se carga):

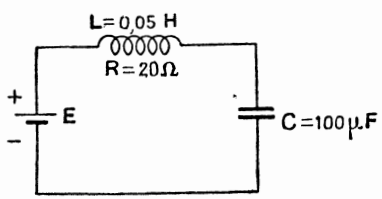


FIG. 44

$$i = \frac{E - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C}}{R},$$

o, finalmente, volviendo a la ecuación 2:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E,$$

es decir:

$$0{,}05\frac{d^2q}{dt^2} + 20\frac{dq}{dt} + \frac{q}{100 \cdot 10^{-6}} = 100$$

o

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 400\frac{dq}{dt} + 200.000q = 2.000.$$

Es esta una ecuación diferencial con segundo miembro constante que ya hemos integrado; se obtiene:

$$q = e^{-200t}(C_1 \cos 400t + C_2 \operatorname{sen} 400t) + 0{,}01.$$

Diferenciando, se obtiene i:

$$i = \frac{dq}{dt} = 200e^{-200t}[(-C_1 + 2C_2)\cos 400t + (-C_2 - 2C_1)\operatorname{sen} 400t].$$

Ahora bien, para $t = 0$, $i = 0$ y $q = 0$, lo que da:

$$C_1 = -0{,}01$$

y

$$-C_1 + 2C_2 = 0, \qquad \text{de donde} \qquad C_2 = -0{,}005.$$

Así se tendrá:

$$q = e^{-200t}(-0{,}01 \cos 400t - 0{,}005 \operatorname{sen} 400t) + 0{,}01$$

e

$$i = 5e^{-200t} \operatorname{sen} 400t.$$

Se ve así que i es sinusoidal amortiguada y desaparece muy rápidamente, tendiendo a cero, mientras que la carga q, que primeramente es sinusoidal amortiguada, tiende a estabilizarse en 0,01 que es la carga final; en efecto:

$$Q = CV = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 100$$
$$= 10^{-2} \text{ culombios.}$$

5.22. Problema XXII. Calcular el período de una palanca de ascenso. — Sea un pequeño anillo metálico (de sección rectangular), de radio exterior R_1 e interior R_2, y de espesor e (fig. 45).

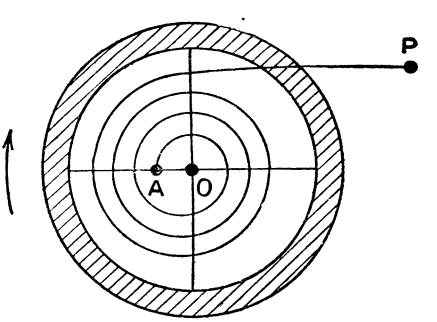


FIG. 45

Un resorte espiral está fijo en un punto P exterior, y el otro extremo rígido está fijado a uno de los brazos del volante. Sea $OA = a$. Se hace girar el volante un ángulo θ_0 a partir de su posición de equilibrio, el resorte ejerce entonces una fuerza F perpendicular al brazo de la palanca, ya que se abandona el sistema a sí mismo. Estudiar el movimiento del volante.

— Despreciando el peso del brazo, el momento de inercia de este volante es (Véase Tomo IV, capítulo I), llamando ρ la masa del volumen del metal,

$$I = \rho \frac{\pi e}{2} (R_1^4 - R_2^4).$$

Tomemos la dirección OA como eje polar y sea θ el ángulo con el cual ha girado el volante al cabo del tiempo t: en este momento el esfuerzo es F', y como en los resortes, la fuerza es proporcional al desplazamiento o bien al ángulo de rotación, se tendrá

$$\frac{F'}{\theta} = \frac{F}{\theta_0}$$

$$F' = F \frac{\theta}{\theta_0}.$$

El teorema de la energía cinética aplicada a un cuerpo en giro (variación de la energía cinética = $\sum$ de los trabajos de las fuerzas exteriores) da, llamando dl al desplazamiento de la fuerza F':

$$d\left(\frac{1}{2}\omega^2 I\right) = -F' \cdot dl;$$

el trabajo de F' es negativo, ya que se ejerce en sentido opuesto a la variación positiva de θ. Se tendrá:

$$d\left[\frac{1}{2} I \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -F \frac{\theta}{\theta_0} \cdot a\, d\theta$$

o

$$I \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot dt = -F \frac{\theta}{\theta_0} a\, d\theta,$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{F}{\theta_0} a\theta = 0,$$

ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes y sin segundo miembro. La ecuación característica es

$$Ir^2 + \frac{Fa}{\theta_0} = 0,$$

sus raíces son imaginarias

$$r = \pm j\sqrt{\frac{Fa}{I\theta_0}} = \pm jm.$$

el movimiento es, por consiguiente, sinusoidal, y la solución es

$$\theta = A\cos mt + B\,\text{sen}\,mt.$$

Calculemos las constantes A y B:

$$\text{para} \quad t = 0, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

de donde

$$\theta_0 = A,$$

ahora bien

$$\frac{d\theta}{dt} = -Am\,\text{sen}\,mt + Bm\cos mt,$$

lo que da

$$0 = 0 + Bm \qquad \text{de donde} \qquad B = 0.$$

Por consiguiente, se tiene

$$\theta = \theta_0 \cos mt.$$

El coeficiente de t es, evidentemente, la pulsación $\omega = \frac{2\pi}{T}$, de donde el período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I\theta_0}{Fa}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho\pi e(R_1^4 - R_2^4)'\theta_0}{2Fa}}.$$

Tal es el período del balanceo espiral de una ascensión, y se ven también la influencia de diversos factores: a, F, e, θ_0, ρ, R_1 y R_2 sobre los cuales puede actuarse.

Evidentemente hemos despreciado los frotamientos de los dos pivotes, así como la resistencia del aire.

5. 23. Problema XXIII. Propagación del calor a lo largo de una barra.

— Sea una barra B, en el aire, que suponemos muy larga (teóricamente, infinito) de la que un extremo está soldado en un medio en el

cual la temperatura es más alta que la del medio ambiente. El calor sale por esta barra, que además se enfría, estando influida por el aire ambiente (fig. 46). Se pide estudiar la distribución de la temperatura a lo largo de la barra cuando está sometida al régimen permanente.

— Coloquémonos a la distancia x del origen, y sea θ el exceso de temperatura en este punto sobre la temperatura ambiente; determinemos la función

$$\theta = f(x).$$

Es el físico francés FOURIER quien ha estudiado con pormenores las leyes de la propagación del calor en diferentes condiciones.

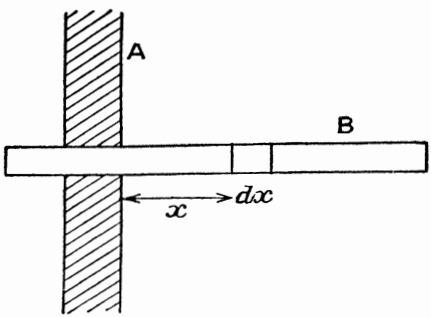


FIG. 46

Sea $x + dx$ la distancia donde la temperatura se transforma en $\theta + d\theta$. La cantidad de calor que atraviesa la sección S de la barra (por conducción) a la distancia x es, durante un segundo

$$Q = -KS\frac{d\theta}{dx}$$

con el signo —, ya que θ disminuye si x aumenta.

K, conductividad térmica del material, es igual a la cantidad de calor que pasa a través de una sección de 1 cm² (perpendicular) durante un segundo y para una diferencia de temperatura de 1 grado entre dos secciones distantes 1 cm.

A la distancia $x + dx$, esta cantidad se convierte en

$$Q - dQ = -KS\frac{d}{dx}(\theta - d\theta) = -KS\left(\frac{d\theta}{dx} - \frac{d^2\theta}{dx^2}dx\right),$$

y la diferencia

$$dQ = -KS\frac{d^2\theta}{dx^2}dx$$

se pierde en la superficie lateral (por convención) de la sección dx.

Calculemos, por otra parte, esta última cantidad de calor perdido. Llamemos

p, el perímetro de la sección dx,

α, el coeficiente de pérdida exterior, que depende del estado de rugosidad de la superficie exterior, de su naturaleza, y también de su color.

La sección dx tiene una superficie exterior igual a $p\,dx$ y si la temperatura del aire exterior es 0° C, la cantidad de calor perdido así será, por consiguiente, en un segundo, e insistiendo en que dQ es negativo

$$dQ = -\alpha\theta \cdot p\,dx,$$

es, en efecto, proporcional a θ en este punto.

Igualando estos dos valores de dQ, se obtiene

$$-KS\frac{d^2\theta}{dx^2}dx = -\alpha\theta p\,dx$$

o, poniendo

$$\frac{p\alpha}{KS} = m^2, \qquad (m \text{ es siempre} > 0)$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

ecuación de segundo orden, cuya solución es

$$\theta = Ae^{mx} + Be^{-mx}.$$

Si para $x = 0$, $\theta = \theta_0$, se tiene $\theta_0 = A + B$.

y si la barra es infinita, $\theta = 0$ para $x = \infty$, de donde $A = 0$.

Se convierte en

$$\boxed{\theta = \theta_0 e^{-mx}}$$

decreciendo así la temperatura exponencialmente.

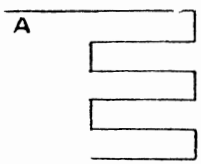


FIG. 47

En la práctica, en biología por ejemplo, se toma una lámina metálica delgada que se dobla en zig-zag (fig. 47) y que se calienta en A con una fuente de calor, obteniéndose así, a lo largo de esta lámina, temperaturas constantes en cada punto, y variables en función de la separación.

5. 24. Problema XXIV. La lámpara osciladora de radio. — Dada una lámpara triodo (o pentodo) de Radio en circuito en el cual se coloca otro circuito oscilante (bobina de inductancia y capacidad) conectada con una bobina colocada en el circuito enrejado. Se sabe que, el acoplamiento magnético entre rejilla y placa tiene la sensibilidad y el valor convenientes. El circuito oscilante oscila entonces y sus oscilaciones son mantenidas por la lámpara (fig. 48).

La rejilla de la lámpara, gracias al «gatillo» que produce sobre la corriente de la chapa, juega el mismo papel que el del escape de un péndulo por el peso y donde el balanceo es periódico, bajo la acción de impulsos procedentes del peso motor.

Trátase entonces de calcular el período de las oscilaciones. Vamos a comprobar que este problema es una magnífica aplicación de las ecuaciones diferenciales.

— Supongamos que la rejilla sea lo bastante negativa para que no haya corriente en la misma, y también que, durante el funcionamiento, no se alcance la parte izquierda de la característica de la corriente de la placa $I_p = f(v_g)$.

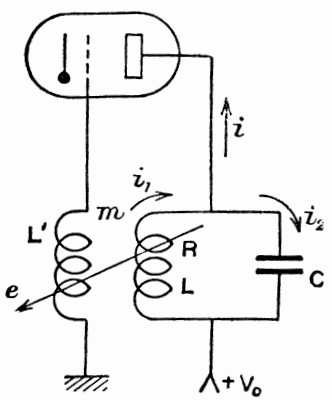


FIG. 48

Coloquémonos en un instante cualquiera y sigamos los cálculos dados por C. GUTTON.

Llamemos:

m la inductancia mutua entre L y L',

i_1 el valor instantáneo de la corriente alterna en L,

I_0 la corriente continua permanente en la placa,

i_2 el valor instantáneo de la corriente alterna en C,

i el valor instantáneo de la corriente alterna en el circuito de la placa,

R la resistencia óhmica de la bobina de la placa,

L la inductancia propia de la bobina de la placa,

L' la inductancia propia de la bobina de la rejilla,

V_0 la tensión continua de la fuente de alta tensión,

v_g la tensión instantánea de la rejilla,

v_p la tensión instantánea de la placa,

K el coeficiente de amplificación de la lámpara,

ρ la resistencia interna de la lámpara.

Supongamos que las corrientes tengan, en este momento, los signos indicados por las flechas.

La ecuación de la lámpara triodo, es decir, la ecuación que liga la corriente en la placa i con la tensión en la rejilla v_g y la tensión de la

placa v_p, es, así como lo habíamos indicado en el Tomo II, párrafo 90, y en el capítulo de funciones de varias variables:

$$\rho i = \mathrm{K}v_g + v_p. \tag{1}$$

También se tiene

$$\rho i = i_1 - i_2 \tag{2}$$

y la fuerza electromotriz e inducida por L en L' es

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -m\frac{di_1}{dt},$$

Como no hay corriente en la rejilla en L' la diferencia de potencial v_g entre la rejilla y el cátodo es igual a e

$$v_g = -m\frac{di_1}{dt} \tag{3}$$

Finalmente, la ley de KIRCHHOFF aplicada a la bobina da

$$\mathrm{R}i_1 + \mathrm{L}\frac{di_1}{dt} = -v_p \tag{4}$$

con el signo —, ya que, cuando i_1 aumenta, v disminuye.

Por último, si durante un tiempo dt el condensador recibe una carga dq, se tiene, llamando dv a la variación de la diferencia de potencial entre los bornes de C:

$$dq = +\, i_2 dt = \mathrm{C}\cdot dv$$

$$i_2 = \mathrm{C}\frac{dv}{dt} \tag{5}$$

con el signo +, ya que cuando la carga q de C aumenta, la tensión de la placa v_g aumenta también y su diferencial dv es positiva.

Estas cinco ecuaciones van a darnos la función $i_1 = f(t)$, de donde deduciremos el período T de las osilaciones.

Puesta en ecuación. — Eliminemos i, v_p y v_g.

La ecuación (1) se transforma en

$$\rho(i_1 - i_2) = \left(-\mathrm{R}i_1 - \mathrm{L}\frac{di_1}{dt}\right) + \mathrm{K}\left(-m\frac{di_1}{dt}\right)$$

$$\rho(i_1 - i_2) + \mathrm{R}i_1 + (\mathrm{L} + \mathrm{K}m)\frac{di_1}{dt} = 0. \tag{6}$$

Ahora bien, la ecuación (5) se convierte en

$$i_2 = C\frac{dv}{dt} = C\left(-R\frac{di_1}{dt} - L\frac{d^2i_1}{dt^2}\right),$$

sustituyamos este valor en (6).

$$\rho\left(i_1 + CR\frac{di_1}{dt} + CL\frac{d^2i_1}{dt^2}\right) + Ri_1 + (L + Km)\frac{di_1}{dt} = 0.$$

Ordenemos y dividamos por $C\rho$.

$$\boxed{L\frac{d^2i_1}{dt^2} + \left(R + \frac{L + Km}{C\rho}\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C}\left(1 + \frac{R}{\rho}\right) = 0}$$

ecuación diferencial de segundo orden, con coeficientes constantes y sin segundo miembro.

Puede simplificarse, ya que, en la práctica, R es mucho menor que ρ, resultando entonces

$$L\frac{d^2i_1}{dt^2} + \left(R + \frac{L + Km}{C\rho}\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C} = 0. \qquad (7)$$

Discusión y resolución. — Si se compara esta ecuación con la que se ha obtenido antes, cuando hemos estudiado la descarga oscilante de un condensador en una bobina, y que es

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0,$$

se ve que la acción de la lámpara ha añadido a R el término $\dfrac{L + Km}{C\rho}$ que puede ser nulo o negativo si m es bastante fuerte y tiene el sentido deseado.

Pongamos

$$\boxed{R + \frac{L + Km}{C\rho} = R'}$$

La ecuación característica de la ecuación (7) es

$$Lr^2 + R'r + \frac{1}{C} = 0$$

de donde

$$r = \frac{-R' \pm \sqrt{R'^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L} = -\frac{R'}{2L} \pm \sqrt{\frac{R'^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Llamamos coeficiente de amortiguación al valor

$$\alpha = \frac{R'}{2L} = \frac{1}{2L}\left(R + \frac{L + Km}{C\rho}\right)$$

y

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4L^2}\left(R + \frac{L + Km}{C\rho}\right)^2}$$

de donde

$$r = -\alpha \pm \sqrt{-\Omega^2} = -\alpha \pm j\Omega,$$

siendo imaginarias las raíces, la solución i es *sinusoidal*.

Se insiste en que

1.° Si $L + Km > 0$, la amortiguación aumenta y las oscilaciones se sofocan.

2.° Si $R + \frac{L + Km}{C\rho} = 0$, la amortiguación es nula y las oscilaciones guardan una amplitud constante.

3.° Si $R + \frac{L + Km}{C\rho} < 0$, es negativo, R' es negativo, y la corriente aumenta de amplitud hasta quedar limitada por la parte izquierda de la curva $i = f(v_\rho)$.

Por consiguiente, se tendrá

$$i_1 = I_1 e^{-\alpha t} \cdot \operatorname{sen}(\Omega t - \varphi),$$

cuyo período T viene dado por

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4L^2}\left(R + \frac{L + Km}{C\rho}\right)^2}}$$

$$T = f(L, C, R, K, m, \rho).$$

Cuando R′ es nulo (lo que es posible, ya que m puede ser negativo), queda

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{LC}}$$

como si el circuito LC *estuviese solo,* e

$$i_1 = I_1 \operatorname{sen} (\Omega t - \varphi),$$

la corriente tiene una amplitud máxima constante.

Para que haya oscilaciones mantenidas, es necesario, por lo tanto, que se de

$$R' \leqslant 0, \qquad \text{es decir} \qquad R + \frac{L + Km}{C\rho} \leqslant 0$$

o

$$C\rho R + L + Km \leqslant 0$$

lo que exige que m sea negativo, de ahí la fórmula clásica que se llama *condición límite de entretenimiento*

$$\boxed{\rho CR + L = Km}$$

En realidad, el término en i_1 de la ecuación diferencial es $\frac{i_1}{C}\left(1 + \frac{R}{\rho}\right)$ lo que daría

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + \frac{R}{\rho}}.$$

Se deduce

$$m = \frac{\rho CR + L}{K} = \frac{\rho CR}{K} + \frac{L}{K},$$

y llamando S a la pendiente de la lámpara:

$$m = \frac{CR}{S} + \frac{L}{K}$$

Se ve también que si K y S son grandes, m será pequeño (por ejemplo: 1μH), por lo que las lámparas de gran pendiente tienen tendencia a oscilar espontáneamente.

También se observa que si, por una razón cualquiera, R aumenta, no satisfaciéndose la igualdad anterior, la oscilación cesa: se dice

que la lámpara «desfasa». (Véase el Tomo II de nuestra obra *Teoría y Práctica de los circuitos de Electrónica y amplificadores*).

Nota. — El hecho de que $R' \leqslant 0$ quiere decir que el funcionamiento de la lámpara, y el montaje de la reacción rejilla-placa, tienen como efecto introducir en el carcuito LC una resistencia negativa de valor $\frac{L + Km}{C\rho}$ que anula R, lo que explica la oscilación espontánea del circuito oscilante.

CAPITULO VI

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

6. 1. Sistemas de dos ecuaciones lineales de primer orden. — Sean dos funciones $y = f(x)$ y $z = \varphi(x)$ ligadas entre sí y sus derivadas por dos expresiones del tipo

$$Ay' + Bz' + Cy + Dz = 0$$
$$A_1y' + B_1z' + C_1y + D_1z = 0.$$

Considerémoslas como formando dos ecuaciones con dos incógnitas y' y z'. Por consiguiente, podemos, por el método de sustitución, resolverlas con respecto a y' y z', y ponerlas bajo la forma

$$y' = ay + bz \tag{1}$$
$$z' = cy + dz \tag{2}$$

donde a, b y d son constantes.

Entonces es fácil volver al caso de una sola ecuación con una incógnita, y, por ejemplo. En efecto, derivemos la ecuación (1) con respecto a x

$$y'' = ay' + bz'. \tag{3}$$

Las ecuaciones (3) y (2) dan z' y z y sustituyendo en (1) solamente quedarán los términos en y, y' e y'', es decir, una ecuación de segundo orden en y. En efecto, la ecuación (3) se convierte en

$$y'' = ay' + b(cy + dz) = ay' + bcy + bdz.$$

Sustituyamos ahora z por su valor obtenido de la ecuación (1)

$$y'' = ay' + bcy + bd\left(\frac{y' - ay}{b}\right)$$
$$y'' - y'(a + d) - y(bc - ad) = 0 \tag{4}$$

ecuación de segundo orden que tendrá dos constantes arbitrarias, y que dará y.

Para calcular z, podrá volver a utilizarse el mismo procedimiento derivando primeramente la ecuación (2) pero es más sencillo insistir en que, ya que son conocidos y e y', sustituyendo sus valores en la ecuación (1), se obtendrá z directamente sin integración.

Si la ecuación (4) tuviese segundo miembro variable, se integraría de la forma conocida.

Finalmente, con frecuencia, los cálculos se simplifican según el tipo de ecuación.

6. 2. Ejemplos.

Primer ejemplo — Sea el sistema

$$y' = y - 5z \tag{1}$$
$$z' = y + 7z \tag{2}$$

en el que y y z son funciones solamente de x.

— Derivemos la primera

$$y'' = y' - 5z = y' - 5(y + 7z)$$

y sustituyamos z por su valor obtenido de la ecuación (1)

$$y'' = y' - 5y - 35\left(\frac{y - y'}{5}\right) = y' - 5y - 7y + 7y'$$
$$y'' - 8y' + 12y = 0,$$

cuya ecuación característica es

$$r^2 - 8r + 12 = 0 \quad \text{de donde} \quad \left| \begin{array}{l} r_1 = +6 \\ r_2 = +2. \end{array} \right.$$

En consecuencia, la solución es

$$y = K_1 e^{6x} + K_2 e^{2x}. \tag{3}$$

Se obtiene

$$y' = 6K_1 e^{6x} + 2K_2 e^{2x},$$

sustituyamos en la ecuación (1), resultando z

$$z = \frac{y - y'}{5} = -(K_1 e^{6x} + K_2 e^{2x} - 6K_1 e^{6x} - 2K_2 e^{2x})$$
$$= -K_1 e^{6x} - \frac{1}{5} K_2 e^{2x} = K' e^{6x} + K'' e^{2x}$$

Por consiguiente, queda resuelto el sistema de ecuaciones.

Segundo ejemplo. — *Integrar el sistema*

$$\frac{dx}{d\theta} = y, \qquad \frac{dy}{d\theta} = -x + \theta$$

en el que θ *es la variable, siendo* x *e* y *dos funciones. Se obtendrá la solución de modo que, para* $\theta = 0$, *se tenga* $x = 0$ e $y = 0$.

— Derivemos la segunda ecuación con respecto a θ y sustituyamos x' por su valor obtenido de la primera ecuación

$$y'' = -x' + 1 = -y + 1$$

es decir

$$y'' + y = 1,$$

ecuación simple que se integra directamente y que da

$$y = A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta + 1,$$

de donde

$$y' = -A\operatorname{sen}\theta + B\cos\theta.$$

La segunda ecuación del sistema dará

$$x = \theta - y' = \theta + A\operatorname{sen}\theta - B\cos\theta.$$

Pasemos a los límites: para $\theta = 0$, se tiene $x = 0$ e $y = 0$, de donde

$$\left|\begin{array}{l} 0 = A + 1 \\ 0 = -B, \end{array}\right. \qquad \text{y} \qquad A = -1$$

lo que produce, sustituyendo en x y en y:

$$\left|\begin{array}{l} y = 1 - \cos\theta \\ x = \theta - \operatorname{sen}\theta, \end{array}\right.$$

que se conoce como ecuación de la cicloide.

6. 3. Aplicaciones eléctricas. Problema de la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de una línea (*estudio simplificado*).

— Primeramente hagamos un simple estudio; después haremos otro más completo, *como aplicación de las ecuaciones a las derivadas parciales.*

Tratemos este problema eléctrico por imaginarias y para ello supongamos un hilo paralelo al suelo, infinitamente largo, que posee por unidad de la longitud una inductancia L y una capacidad C, uniformemente repartidas. Despreciemos la resistencia óhmica y supongamos la línea perfectamente aislada.

A los lectores no familiarizados con este método de cálculo por imaginarias, les recomendamos la lectura de nuestra obra *Teoría y Práctica de los circuitos de Electrónica y amplificadores,* editado por Dunod (5.ª edición).

— Al principio de la línea situemos una fuente alterna de alta frecuencia, proporcionando una corriente también de alta frecuencia a esta línea abierta, y coloquémonos (fig. 49) a la distancia x de la fuente, donde la corriente es I.

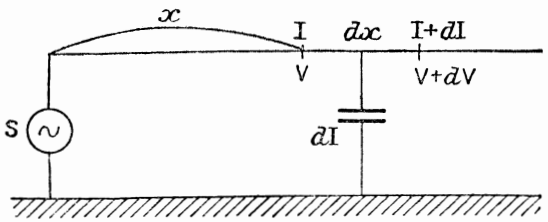


FIG. 49

Aumentemos x en dx: a la salida del elemento dx, la corriente será, por ejemplo, $I + dI$, la diferencia $I - (I + dI) = -dI$, siendo la corriente que pasa en la capacidad $C\,dx$ del elemento considerado. Llamemos V a la tensión de entrada y $V + dV$ a la de salida. La ley de OHM aplicada al elemento dx da, en imaginarias,

$$V - (V + dV) = j(L\,dx)\omega I \qquad (j = \sqrt{-1})$$

de donde

$$\boxed{\frac{dV}{dx} = -jL\omega I} \tag{1}$$

Por otra parte, se tiene, a través de la capacidad $C\,dx$, una corriente

$$-dI = \frac{V}{-\dfrac{j}{(C\,dx)\omega}} = -\frac{VC\,dx\omega}{j} = jVC\,dx\omega$$

o

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = -jC\omega V} \tag{2}$$

Lo que da un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, con dos incógnitas V e I, en el cual $V = f(x)$ e $I = \varphi(x)$.

Resolución. — Derivemos la ecuación (1)

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -jL\omega \frac{dI}{dx},$$

pues bien, $\frac{dI}{dx}$ viene dado por la ecuación (2), por lo que se tiene

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -jL\omega(-jVC\omega) = -LC\omega^2V \tag{3}$$

Igualmente, derivemos la ecuación (2)

$$\frac{d^2I}{dx^2} = -jC\omega \cdot \frac{dV}{dx} = -jC\omega(-jL\omega I)$$

$$= -LC\omega^2 I. \tag{4}$$

Las ecuaciones (4) y (3) son de la forma

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + K^2y = 0} \qquad \text{con } K^2 = LC\omega^2)$$

La ecuación característica es

$$r^2 + K^2 = 0 \quad \text{de donde} \quad r = \pm jK,$$

la solución es sinusoidal, y se tendrá

$$V = A \operatorname{sen} Kx + B \cos Kx, \tag{5}$$

igualmente. Con respecto a la ecuación (1), se tiene

$$I = \frac{-1}{jL\omega} \frac{dV}{dx} = \frac{-1}{jL\omega}(KA \cos Kx - BK \operatorname{sen} Kx)$$

con $K = \omega \sqrt{LC}$, de donde

$$I = \frac{-\omega \sqrt{LC}}{jL\omega}(A \cos Kx - B \operatorname{sen} Kx)$$

$$= j\sqrt{\frac{C}{L}}(A \cos Kx - B \operatorname{sen} Kx). \tag{6}$$

Las constantes A y B se determinan por las condiciones en los

límites: por ejemplo, si la línea tiene una longitud l y termina por un receptor de impedancia Z_2, debe tenerse en el extremo

$$\text{para} \quad x = l, \quad V = V_2 \quad \text{e} \quad I = I_2,$$

de donde

$$Z_2 = \frac{V_2}{I_2}.$$

Para $x = l$, las ecuaciones (5) y (6) dan

$$\left| \begin{array}{l} V_2 = A \operatorname{sen} Kl + B \cos Kl \\ I_2 = j\sqrt{\dfrac{C}{L}}\,(A \cos Kl - B \operatorname{sen} Kl), \end{array} \right.$$

obteniéndose el valor de la impedancia en el extremo de la línea

$$\frac{V_2}{I_2} = Z_2 = \frac{A \operatorname{sen} Kl + B \cos Kl}{j\sqrt{\dfrac{C}{L}}\,(A \cos Kl - B \operatorname{sen} Kl)}.$$

Por fin, en el origen, para $x = 0$ se tiene $V - V_1$, y la ecuación (5) da $V_1 = B$.

Por otra parte, para $x = 0$, la ecuación (6) da

$$I_1 = j\sqrt{\frac{C}{L}}\,A,$$

resultando A.

Por consiguiente sustituyamos B por V_1, y A por el valor

$$A = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{I_1}{j} = -jI_1\sqrt{\frac{L}{C}}$$

así se tendrá

$$Z_2 = \frac{-jI_1\sqrt{\dfrac{L}{C}} \operatorname{sen} Kl + V_1 \cos Kl}{j\sqrt{\dfrac{C}{L}}\left(-jL_1\sqrt{\dfrac{L}{C}} \cos Kl - V_1 \operatorname{sen} Kl\right)}$$

y, dividiendo numerador y denominador por I_1, dado que $\dfrac{V_1}{I_1} = Z_1$ a la

entrada de la línea, queda

$$Z_2 = \frac{-j\sqrt{\frac{L}{C}}\operatorname{sen} Kl + Z_1 \cos Kl}{j\sqrt{\frac{C}{L}}\left(-j\sqrt{\frac{L}{C}}\cos Kl - Z_1 \operatorname{sen} Kl\right)}$$

$$= \frac{Z_1 \cos Kl - j\sqrt{\frac{L}{C}}\operatorname{sen} Kl}{\cos Kl - j\sqrt{\frac{C}{L}}Z_1 \operatorname{sen} Kl} = \frac{Z_1 - j\sqrt{\frac{L}{C}}\operatorname{tg} Kl}{1 - j\sqrt{\frac{C}{L}}Z_1 \operatorname{tg} Kl}$$

que da una relación entre impedancia de entrada Z_1 y de salida Z_2. Esta fórmula permite ver con detalle el resultado cuando l es igual a $\frac{\lambda}{2}$ o $\frac{\lambda}{4}$, o bien si la línea está en cortocircuito, estudio que no podemos desarrollar aquí.

Caso de una línea infinita. La solución de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K^2y = 0$$

puede también ponerse en la forma

$$y = Ae^{-jKx} + Be^{+jKx},$$

es decir

$$V = Ae^{-jKx} + Be^{+jKx}$$

e

$$I = A'e^{-jKx} + B'e^{+jKx}.$$

Pero en un hilo infinito, la corriente i y la tensión son, evidentemente, nulas en el infinito, ya que la resistencia del hilo debilita la corriente, y, por otra parte, hay siempre fugas por malos aislamientos (no se tienen en cuenta en el cálculo). Por consiguiente, para $x = \infty$, y debe ser nulo, lo que exige $B = 0$, y $B' = 0$. Además, para $x = 0$, debe tenerse V_0 para la diferencia de potencial en el origen, por consiguiente

$$A = V_0,$$

lo que da

$$V = V_0e^{-jKx}$$

Como por otra parte

$$-\frac{dV}{dx} = jL\omega I,$$

resulta que

$$jKV_0e^{-jKx} = jL\omega \cdot A'e^{-jKx},$$

de donde

$$A' = \frac{KV_0}{L\omega} = \frac{\omega\sqrt{LC}V_0}{L\omega} = \sqrt{\frac{C}{L}}V_0,$$

e

$$= I\sqrt{\frac{C}{L}}V_0e^{-jKx} = I_0e^{-jKx}$$

Entonces puede escribirse

$$V = V_0(\cos Kx - j \operatorname{sen} Kx)$$
$$I = I_0(\cos Kx - j \operatorname{sen} Kx),$$

ahora bien

$$\cos Kx = \cos K\left(x + \frac{2\pi}{K}\right)$$

por consiguiente V e I representan el mismo valor si x aumenta en $\frac{2\pi}{K}$, por ello esta cantidad ha sido denominada *longitud de onda*:

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{T}{\sqrt{LC}}$$

ahora bien la velocidad de propagación γ viene dada por la fórmula $\lambda = \gamma T$, obteniéndose de esta forma el valor γ

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

valor dado por MAXWELL.

Se tienen ondas *progresivas*; V e I varían sinusoidalmente en función del tiempo a lo largo de la línea.

—Haremos, al fin del párrafo siguiente, un estudio más completo de este asunto, como aplicación de las ecuaciones a las derivadas parciales, y en las que interviene el tiempo t.

6. 4. Estudio de los circuitos oscilantes acoplados.

— Supongamos dos circuitos eléctricos que comprenden cada uno una bobina y un condensador, acoplados entre sí magnéticamente. Uno de los condensadores C_1 ha sido cargado y se descarga en la bobina, apareciendo entonces una corriente en el otro circuito y los dos vuelven a actuar uno sobre el otro (fig. 50).

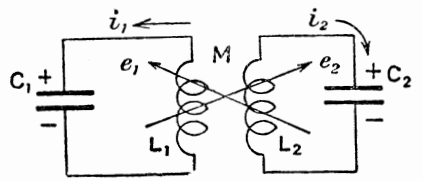


FIG. 50

Si el acoplamiento fuese nulo, y despreciando la resistencia óhmica (para simplificar los cálculos), el período de las oscilaciones sería, como lo hemos calculado antes,

$$T = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Pero debido al acoplamiento, la inductancia aparente de cada bobina se modifica por la presencia de la otra (es, en efecto, un transformador) y el período de las corrientes i_1 e i_2 se modifica. Calculemos la nueva pulsación ω, que es, evidentemente, la misma para las dos corrientes, y llamemos ω_1 y ω_2 las pulsaciones propias de cada circuito supuestos aislados

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}};$$

llamemos M a la inductancia mutua de las dos bobinas y coloquémonos en un instante cualquiera. En este momento la primaria induce en el secundario una fuerza electromotriz de inducción

$$e_2 = -M\frac{di_1}{dt}$$

y el secundario induce en el primario otra f.e.m.

$$e_1 = -M\frac{di_2}{dt}.$$

— Apliquemos ahora la segunda ley de KIRCHHOFF a cada uno de los dos circuitos, llamando v_1 y v_2 las diferencias de potencial entre los bornes de los condensadores, que actúan como fuerzas contra-

electromotrices:

$$\left|\begin{array}{l} i_1 = \dfrac{e_1 - L_1 \dfrac{di_1}{dt} - v_1}{R_1} \\ \\ i_2 = \dfrac{e_2 - L_2 \dfrac{di_2}{dt} - v_2}{R_2} \end{array}\right.$$

o

$$v_1 + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = e_1$$

$$v_2 + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = e_2.$$

Despreciemos R_1 y R_2. Además, llamando q_1 y q_2 las cargas de los dos condensadores, se tiene sucesivamente

$$i_1 = + \frac{dq_1}{dt} \quad \text{y} \quad v_1 = \frac{q_1}{C_1}$$

$$i_2 = + \frac{dq_2}{dt} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{q_2}{C_2},$$

lo que da

$$\left|\begin{array}{l} L_1 \dfrac{d^2q_1}{dt^2} + \dfrac{q_1}{C_1} = -M \dfrac{di_2}{dt} = -M \dfrac{d^2q_2}{dt^2} \\ \\ L_2 \dfrac{d^2q_2}{dt^2} + \dfrac{q_2}{C_2} = -M \dfrac{di_1}{dt} = -M \dfrac{d^2q_1}{dt^2}, \end{array}\right.$$

es este un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales, con coeficientes constantes y dos incógnitas q_1 y q_2 y del mismo orden.

Dividamos la primera por L_1 y la segunda por L_2

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{d^2q_1}{dt^2} + \omega_1^2 q_1 = -\dfrac{M}{L_1} \dfrac{d^2q_2}{dt^2} & (1) \\ \\ \dfrac{d^2q_2}{dt^2} + \omega_2^2 q_2 = -\dfrac{M}{L_2} \dfrac{d^2q_1}{dt^2}. & (2) \end{array}\right.$$

Si la primera estuviese aislada se tendría

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} + \omega^2 q_1 = 0$$

cuya solución es

$$q_1 = Q_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

Aquí, a causa del acoplamiento, el valor de ω está evidentemente modificado, q_1 y q varían también sinusoidalmente; por consiguiente, pongamos

$$q_1 = Q_1 \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{y} \qquad q_2 = Q_2 \operatorname{sen} \omega t,$$

de donde

$$\begin{aligned} q_1'' &= -Q_1\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \\ &= -\omega^2 q_1 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} q_2'' &= -Q_2\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \\ &= -\omega^2 q_2. \end{aligned}$$

Sustituyamos estos valores en las ecuaciones (1) y (2), obteniéndose

$$\left| \begin{aligned} -\omega^2 q_1 + \omega_1^2 q_1 &= -\frac{M}{L_1}(-\omega^2 q_2) \\ -\omega^2 q_2 + \omega_2^2 q_2 &= -\frac{M}{L_2}(-\omega^2 q_1) \end{aligned} \right.$$

o

$$\left| \begin{aligned} q_1(\omega_1^2 - \omega^2) &= \frac{M}{L_1}\omega^2 q_2 \\ q_2(\omega_2^2 - \omega^2) &= \frac{M}{L_2}\omega^2 q_1. \end{aligned} \right.$$

Multipliquemos miembro a miembro

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = \frac{M^2}{L_1 L_2}\omega^4$$

y, utilizando el coeficiente de acoplamiento $k = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$, se obtiene

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = k^2\omega^4.$$

— Supongamos, para simplificar los cálculos, que los dos circuitos sean idénticos ($L_1 = L_2$, $C_1 = C_2$):

$$\omega_1 = \omega_2,$$

lo que da

$$(\omega_1^2 - \omega^2)^2 = k^2\omega^4$$
$$\omega_1^2 - \omega^2 = \pm k\omega^2$$
$$\omega_1^2 = \omega^2(1 \pm k)$$
$$\omega_1 = \omega\sqrt{1 \pm k} \qquad (0 < k < 1).$$

Por consiguiente, hay dos valores de ω:

$$\boxed{\omega' = \frac{\omega_1}{\sqrt{1+k}}}$$

y

$$\boxed{\omega'' = \frac{\omega_1}{\sqrt{1-k}}}$$

es decir, que si los dos circuitos oscilan libremente, no estando el primero unido a la fuente, hay en cada circuito, y al mismo tiempo, dos pulsaciones. Y como ω' está muy próximo de ω'' habrá batimientos.

A esto se llega cada vez que dos sistemas oscilantes están acoplados: por ejemplo,

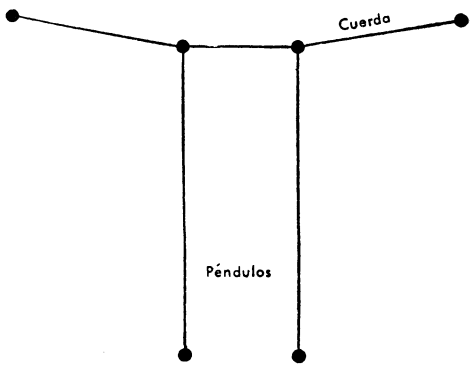


FIG. 51

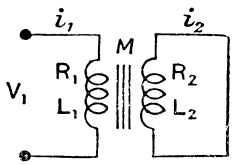


FIG. 52

dos péndulos de la misma longitud, ligados a una cuerda, por consiguiente, acoplados mecánicamente, y que oscilan perpendicularmente al plano de la figura. Los batimientos se manifiestan por el hecho de que la energía mecánica pasa alternativamente de un péndulo al otro: cuando el uno oscila, el otro se para y viceversa (fig. 51).

6. 5. Otro ejemplo eléctrico. — Tomemos un transformador eléctrico en el que el secundario esté en cortocircuito.

Llamemos (fig. 52).

$v_1 = V_1$ sen ωt, la d.d.p. entre los bornes del primario,
R_1 = resistencia óhmica del primario,
R_2 = resistencia óhmica del secundario,
L_1 = inductancia propia, del primario,
L_2 = inductancia propia, del secundario,
M = inductancia mutua de las dos espirales.

— Coloquémonos en un instante cualquiera y llamemos i_1 e i_2 los valores instantáneos de las corrientes en este momento. Apliquemos la ley de KIRCHHOFF a cada uno de los dos circuitos, teniendo en cuenta la ley de LENZ, es decir, teniendo en cuenta las f.e.m. de inducción que son: de un lado, $L\frac{di}{dt}$ para f.e.m. de inducción propia, y del otro $M\frac{di}{dt}$ para la f.e.m. debida a la inducción mutua.

Así se tendrá:

para el primario: $$i_1 = \frac{v_1 - L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}}{R_1}$$

para el secundario: $$i_2 = \frac{0 - L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}}{R_2},$$

o incluso

$$L_1\frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M\frac{di_2}{dt} = v_1 \qquad (1)$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M\frac{di_1}{dt} = 0. \qquad (2)$$

Se sabe que M puede ser positiva o negativa, siguiendo el sentido de rotación de la bobina. Supongámosla positiva y que R_2 sea despreciable; resulta, para la ecuación (2)

$$L_2\frac{di_2}{dt} = -M\frac{di_1}{dt} \quad \text{de donde} \quad i_2 = -\frac{M}{L_2}i_1,$$

así se observa que i_1 e i_2 son, en cada instante, de sentidos contrarios: *estas dos corrientes se repelen* (por consiguiente puede colocarse un disco metálico sobre el centro de un electroimán recorrido por una corriente alterna, formando el disco un secundario en cortocircuito

donde $R_2 = 0$ y M es muy grande: será repelido, ya que i_2 es entonces intensísimo).

La ecuación (1) se convierte entonces en

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \left(-\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} \right) = v_1$$

o

$$\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = v_1,$$

viéndose que *todo ocurre como si la inductancia del primario hubiese disminuido.*

Finalmente, si los flujos magnéticos son nulos, M es máximo e igual a $\sqrt{L_1 L_2}$, y la ecuación se convierte en

$$R_1 i_1 = v_1$$

de donde

$$I_{1\,ef} = \frac{V_{1\,ef}}{R_1},$$

el primario está prácticamente en cortocircuito e I_1 solamente se halla limitado por el valor de R_1.

CAPITULO VII

NOCIONES SOBRE ECUACIONES DIFERENCIALES CON DERIVADAS PARCIALES

7. 1. Generalidades. — Solamente estudiaremos las ecuaciones de segundo orden, las más importantes, y que se encuentran muy frecuentemente en Mecánica, Física y Electricidad.

Las ecuaciones con derivadas parciales de primer orden se refieren a nociones de Geometría analítica en el espacio, lo que sobrepasa los límites de esta obra, y no podemos estudiar aquí. Por otra parte, sus aplicaciones prácticas son escasas.

— Sea una función de dos variables independientes

$$y = f(x, z)$$

Una ecuación con derivadas parciales de segundo orden y dos variables x y z es una ecuación que puede contener, en el caso general, y en forma implícita:

Las dos variables x y z

Sus derivadas parciales primeras $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}$

Sus derivadas parciales segundas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

La derivada segunda mixta $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$.

Por otra parte, es muy raro que todas estas magnitudes figuren en la ecuación al mismo tiempo, teniendo siempre una forma simplificada.

Integrar tal ecuación es hallar la función $y = f(x, z)$ que satisface la ecuación diferencial propuesta.

Se observará que tal función *dependerá de dos funciones arbitrarias,* en lugar de *dos constantes arbitrarias* como era el caso en las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, con una incógnita.

—No existe un método general para resolver tales ecuaciones, ni procedimientos particulares, según el tipo de ecuación a integrar. Estudiaremos los tres tipos principales y haremos a continuación dos aplicaciones muy interesantes: una, estableciendo la célebre ecuación de las cuerdas vibrantes y otra estudiando con detalle la propagación de una corriente eléctrica de alta frecuencia a lo largo de un hilo, fenómeno que tiene en nuestros días una importancia fundamental ya que se aplica a la teoría de las antenas de radio, emisoras dirigidas, «radars», etc.

7. 2. Primer tipo: $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = 0}$

Esta ecuación con respecto a las derivadas parciales expresa que la derivada de $\frac{\partial y}{\partial z}$, con respecto a x, es nula, y, por lo tanto, independiente de x: *en consecuencia, es una función de z solamente.*

$$\frac{\partial y}{\partial z} = f(z).$$

Integremos con respecto a z

$$y = \int f(z)dz + C,$$

pero esta constante C no es realmente una constante, sino una cantidad que podrá depender de x en el caso más general. Es, en verdad, una función de x que llamaremos $G(x)$. Y como la primera integral solamente depende de z, resulta una función que llamaremos $F(z)$. Tendremos pues

$$y = F(z) + G(x).$$

Estas dos funciones F y G son en consecuencia arbitrarias, y está claro que toda función y (que es la suma de dos funciones arbitrarias, una con respecto a x y otra a z), tenga una segunda derivada mixta nula

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = 0.$$

Tal ecuación es de segundo orden, y su integral y encierra, no dos constantes indeterminadas, sino dos funciones arbitrarias de una variable. *Estas dos funciones se determinarán en cada caso particular por las condiciones en los límites,* como en todos los casos en que ha habido que resolver una integral o ecuación diferencial ordinaria.

7. 3. Segundo tipo: $$\boxed{\frac{\partial^2 y}{dt^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \qquad (1)$$

Esta es la célebre ecuación de las cuerdas vibrantes de D'ALEMBERT, que, por otra parte, estableceremos después, y la cual vamos a resolver por el método indicado por EULER.

En esta ecuación, precisemos bien que z y t son las dos variables independientes (x es una distancia y t el tiempo); que y es la función que buscamos y a^2 es una constante positiva.

— Hagamos un cambio de variable, y pongamos

$$\left|\begin{array}{l} u = x + at \\ \\ v = x - at \end{array}\right| \quad \text{de donde} \quad \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{u+v}{2} \\ \\ t = \dfrac{u-v}{2a}. \end{array}\right|$$

así, una función $y = f(x, t)$ se convierte en una función de u y v, es decir $y = g(u, v)$:

$$y = g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2} \quad \frac{u-v}{2a}\right),$$

por consiguiente, puede considerarse como una función *doblemente compuesta* (Véase el Tomo II, párrafo 99).

— Calculemos las derivadas parciales con respecto a x y t: para ello será necesario (y para calcular cada una de las mismas) sumar las derivadas con respecto a u y v, sin olvidar que u y v son funciones de x y de t.

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot 1 + \dfrac{\partial y}{\partial v} \cdot 1 = \dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial v}, \qquad (2) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot a + \dfrac{\partial y}{\partial v}(-a) = a\dfrac{\partial y}{\partial u} - a\dfrac{\partial y}{\partial v}. \qquad (3) \end{array}\right.$$

Calculemos ahora las derivadas segundas con respecto a x y t, es decir $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, lo que da, no olvidando que x y t son funciones compuestas de u y v:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

y, aplicando la misma fórmula que para las (2):

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}. \tag{4}$$

— Igualmente

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(a\frac{\partial y}{\partial u} - a\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

y, aplicando la misma fórmula que para la (2):

$$= a^2\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\right)\right]$$

$$= a^2\left[\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right]. \tag{5}$$

— La ecuación (1) se escribe entonces, por medio de las fórmulas (4) y (5):

$$a^2\left[\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right] = a^2\left[\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right]$$

o

$$-2a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 2a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$$

y

$$4a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$$

o finalmente

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0.$$

Volvemos así a una ecuación del primer tipo, en la que la solución es

$$y = F(u) + G(v),$$

y volviendo a x y a t

$$y = F(x + at) + G(x - at)$$

en donde las dos funciones F y G son indeterminadas en tanto en cuanto no se precisen las condiciones iniciales o finales.

— Vamos a desarrollar luego un ejemplo eléctrico de esta ecuación, aplicado a la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de una línea, estudio que sirve de base a la teoría moderna de las antenas de radio.

7. 4. Solución original de D'Alembert. Creemos que es enormemente instructivo dar la solución original de D'ALEMBERT, solución que ha aparecido por primera vez en 1747, en las *Memorias de la Academia de Berlín*. Se trata de la ecuación simple siguiente

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Pongamos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = q,$$

con

$$y = f(x, t).$$

se tiene

$$dy = p \cdot dx + q \cdot dt. \tag{2}$$

Pero de la ecuación (1) debe obtenerse

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

por consiguiente, la expresión

$$p\,dt + q\,dx$$

es una diferencial total exacta, a la que podemos llamar dv

$$dv = p\,dt + q\,dx. \tag{3}$$

Resulta que, sumando y restando las ecuaciones (2) y (3):

$$\begin{aligned} dy + dv &= (p\,dx + q\,dt) + (p\,dt + q\,dx) \\ &= (p + q)(dx + dt) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} dy + dv &= (p\,dx + q\,dt) - (p\,dt + q\,dx) \\ &= (p - q)(dx - dt) \end{aligned}$$

Así, $y + v$ debe ser una función de $x + t$, e $y - v$ una función de $x - t$; por lo mismo puede ponerse, por ejemplo,

$$\left| \begin{aligned} y + v &= 2f(x + t) \\ y - v &= 2\varphi(x - t), \end{aligned} \right.$$

de donde

$$y = f(x + t) + \varphi(x - t).$$

D'ALEMBERT añadía que, para las cuerdas vibrantes, si $x = 0$, $y = 0$ para todos los valores de t era evidente. Por consiguiente, se tiene

$$f(t) + \varphi(-t) = 0$$

Admitiendo que las dos funciones pudieran desarrollarse siguiendo las potencias enteras de t (lo que exige que no contengan más que potencias impares de t), se tendrá

$$\varphi(-t) = -f(t) = f(x-t)$$

por consiguiente

$$y = f(x+t) + \varphi(x-t),$$

en donde f y φ son funciones cualesquiera, que se determinarán en cada caso particular, de acuerdo con las condiciones iniciales o finales, como veremos después.

7. 5. Tercer tipo: Ecuaciones de Laplace.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0.$$

—Puede integrarse en el caso de dos variables x y z poniendo

$$\left| \begin{array}{l} x + jz = u \\ x - jz = v. \end{array} \right. \qquad (j = \sqrt{-1})$$

Un cálculo idéntico al anterior nos llevaría a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0,$$

siendo la solución, por consiguiente

$$y = F(x + jz) + G(x - jz).$$

7. 6. Otra forma de integrar la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0. \qquad (1)$$

— Se trata de hallar la función de dos variables independientes

$$y = f(x, z),$$

Tratemos de poner y en forma de producto

$$y = u \cdot v$$

donde u es una función de x solamente y v de z, de modo que se verifique la ecuación (1). Pero, siendo u y v cada una funciones de una sola variable, se escribirán sus derivadas con d (y no con δ).

— Se tiene

$$\frac{\partial y}{\partial x} = v\frac{du}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = u\frac{dv}{dz},$$

de donde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = v\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = u\frac{d^2v}{dz^2}$$

Sustituyamos en la ecuación (1)

$$v\frac{d^2u}{dx^2} + u\frac{d^2v}{dz^2} = 0,$$

dividamos por el producto uv

$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{v}\frac{d^2v}{dz^2} = 0$$

$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dz^2}.$$

De acuerdo con nuestra hipótesis, el miembro de la izquierda no puede contener z y el de la derecha x: estas dos expresiones son, por consiguiente, iguales a una constante, que llamaremos K^2. Así se obtiene

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{1}{u}\dfrac{d^2u}{dx^2} = K^2 & \text{o} \quad \dfrac{d^2u}{dx^2} - K^2u = 0 \qquad (2) \\ \text{y} & \\ -\dfrac{1}{v}\dfrac{d^2v}{dz^2} = K^2 & \text{o} \quad \dfrac{d^2v}{dz^2} + K^2v = 0. \qquad (3) \end{array}\right.$$

La solución de la ecuación (2)

$$u = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx},$$

y la solución de la ecuación (3) es

$$v = A\cos Kz + B\,\text{sen}\,Kz,$$

la solución general de la ecuación (1) será, por lo tanto,

$$y = uv = (C_1e^{kx} + C_2e^{-kx})(A\cos Kz + B\,\text{sen}\,Kz).$$

Resulta que las expresiones siguientes son soluciones particulares de la ecuación (1)

$$y = Me^{kx}\cos Kz, \qquad y = Ne^{-kx}\cos Kz$$
$$y = Pe^{kx}\cos Kz, \qquad y = Re^{-kx}\operatorname{sen} Kz$$

Puede ocurrir que la suma de dos o varias de estas soluciones particulares sea una solución de la ecuación 1.

—Veremos después una aplicación particular de la ecuación (1) en electricidad.

Es preciso insistir en que la ecuación de las cuerdas vibrantes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

puede convertirse en la ecuación de LAPLACE, haciendo $a^2 = -1$.

7. 7. Primera aplicación. Establecimiento de la ecuación de las cuerdas vibrantes.

—Esta ecuación se encuentra también en la propagación del calor en un medio isótropo, así como en la propagación de la corriente eléctrica a lo largo de un hilo con resistencia, inductancia y capacidad, uniformemente repartidas.

Por ello, supongamos una cuerda sostenida por un peso P (fig. 53). Si se desvía de su posición de equilibrio, vuelve a la misma bajo la

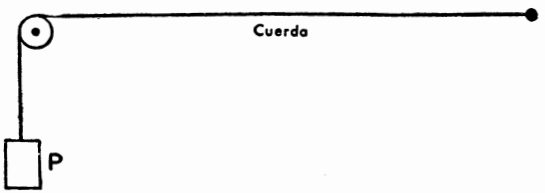


FIG. 53

acción de las fuerzas resultantes de la tensión del hilo, pero tomando la cuerda una forma curvilínea la fuerza motriz varía en cada punto.

Coloquémonos a la distancia x y en un instante t cualquiera, siendo MM′ un elemento = dl de la cuerda. Sea y la ordenada del punto M (fig. 54).

Busquemos la relación entre y, x y t.

En M la tensión del hilo es igual a P y es tangente a la cuerda. Su proyección vertical es P con β; ahora bien, ya que dl es infinitamente pequeño, se tiene

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha = \frac{dy}{dl}.$$

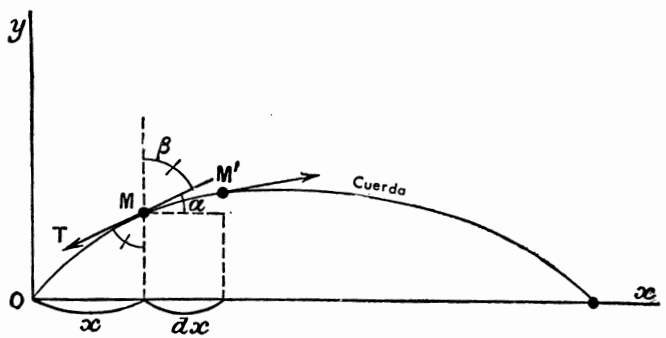


FIG. 54

Pero, por otra parte, la cuerda se aleja poco de su posición de equilibrio, dx y $dl = MM'$ son infinitésimos equivalentes (se sabe que $1 - \cos\alpha$ es un infinitésimo de segundo orden), por consiguiente, puede escribirse

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{dy}{dx} \qquad (\operatorname{sen}\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \text{ para } \alpha \text{ muy pequeño}).$$

La proyección de la tracción T sobre el eje vertical es igual a

$$T\cos\beta = -P \cdot \frac{dy}{dx}.$$

En M' a la salida del elemento dl, esta proyección es igual a su valor en M, más una cierta variación, que es la diferencial con respecto a x de $\frac{dy}{dx}$, es decir $\frac{d^2y}{dx^2}dx$; el valor de M' de esta proyección es así (aplicando los principios de las funciones de varias variables):

$$+ P\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}dx\right).$$

La suma algebraica de las proyecciones verticales de estas dos fuerzas es

$$-\mathrm{P}\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}\,dx\right) = \mathrm{P}\frac{d^2y}{dx^2}\,dx,$$

y esta resultante será, en definitiva, la fuerza F que hace mover el elemento dl. La fórmula fundamental de la mecánica $\mathrm{F} = ma$, donde a es la aceleración $\frac{d^2x}{dt^2}$, nos da

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{F}.$$

Pero como y es una función de dos variables independientes x y t, debemos utilizar δ, y escribir

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mathrm{F} = \mathrm{P}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx,$$

y, llamando δ la masa de la cuerda por unidad de longitud:

$$\delta \cdot dl\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mathrm{P}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx,$$

y como $dx \approx dl$, queda

$$\delta\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mathrm{P}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

o

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t} = \frac{\mathrm{P}}{\partial}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

que escribiremos de la forma

$$\frac{\partial^2 y}{dt^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad \left(\text{con } a^2 = \frac{\mathrm{P}}{\delta}\right)$$

que es la ecuación clásica de las cuerdas vibrantes, ecuación con derivadas parciales del tipo considerado antes. Por consiguiente, la solución es una suma de dos funciones arbitrarias. Pero aquí, para $t = 0$ y $x = 0$, se tiene $y = 0$, entonces puede verificarse que la expresión siguiente satisfaga la ecuación diferencial

$$y = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}\,(bt + cx),$$

la elongación de la cuerda es periódica en tiempo y espacio.

En realidad, una discusión más completa mostraría que la solución general es,

$$y = A \operatorname{sen} (bt + cx) + B \operatorname{sen} (bt - cx),$$

lo que da origen a las ondas estacionarias, es decir, a los nudos y vientres, fenómenos sobre los cuales no podemos extendernos más aquí, pero vamos a volver al estudio de la propagación de la corriente eléctrica de alta frecuencia a lo largo de un hilo.

7. 8. Segunda aplicación. — Propagación de una corriente eléctrica de alta frecuencia a lo largo de un hilo.

— Supongamos un hilo eléctrico paralelo al suelo y ligado por un extremo a un generador de corrientes de alta frecuencia (fig. 55).

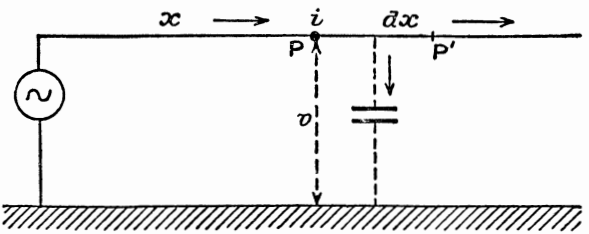


FIG. 55

Aunque el circuito esté abierto, habrá corriente en este hilo, porque hay inductancia y capacidad (con respecto al suelo) repartidas regularmente. También podrán tomarse dos hilos paralelos.

— Llamemos:

R_1 la resistencia óhmica por unidad de longitud,

L_1 la inductancia por unidad de longitud,

C_1 la capacidad (con relación al suelo) por unidad de longitud.

Coloquémonos en un punto P a la distancia x de la fuente; en este punto la corriente instantánea es i y el potencial (con respecto al suelo) v, teniéndose

$$i = f(x, t) \quad \text{y} \quad v = \varphi(x, t),$$

son estas funciones de dos variables independientes: la distancia x y el tiempo t.

Aumentemos x en dx; el elemento dx tiene una resistencia $R_1 dx$ inductancia $L_1 dx$ y capacidad $C_1 dx$.

Ya que se tienen dos funciones de dos variables, los valores de i y v en P' se convierten al instante en

$$i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \qquad \text{y} \qquad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

La diferencia de potencial entre P y P' es, por consiguiente

$$v - \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) = -\frac{\partial v}{\partial x} dx,$$

y la corriente de carga de la capacidad $C_1 dx$ es igual a la diferencia entre la corriente i a la entrada, en P, y la corriente en P' a la salida, es decir

$$i - \left(i + \frac{\partial i}{\partial x} dx\right) = -\frac{\partial i}{\partial x} dx$$

Apliquemos ahora la ley de KIRCHHOFF al elemento dx

$$(R_1 dx)i + (L_1 dx)\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} dx$$

o, dividiendo por dx

$$\boxed{R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad (1)$$

Por otra parte, la corriente de carga del condensador es también igual a $\frac{\partial q}{\partial t} = (C_1 dx)\frac{\partial v}{\partial t}$ (pues se sabe que $q = C \cdot v$).

Consecuentemente se tendrá, igualando estos dos valores de la corriente de carga,

$$-\frac{\partial i}{\partial x} dx = (C_1 dx)\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\boxed{-\frac{\partial i}{\partial x} = C_1 \frac{\partial v}{\partial t}} \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) forman así un sistema de dos ecuaciones con derivadas parciales, con dos incógnitas v e i.

En radio, con corrientes de alta frecuencia, el término $L_1 \frac{\partial i}{\partial t}$ que es proporcional a la frecuencia (ya que la fuente da en la práctica una corriente sinusoidal) es mucho mayor que $R_1 i$, también despreciaremos el último término; lo que da el sistema simple

$$\boxed{L_1 \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \tag{3}$$

$$\boxed{C_1 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}} \tag{4}$$

Derivemos (3) con respecto a x y (4) con respecto a t, resultando

$$L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

y

$$C_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$$

de donde

$$-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L_1 \left(-C_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)$$

o poniendo

$$\frac{1}{L_1 C_1} = \gamma^2$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} \tag{5}$$

También, derivemos (3) con respecto a t, y (4) a x, obteniéndose

$$L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}$$

y

$$C_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 i}{\partial x^2},$$

de donde

$$L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = -\frac{1}{C_1}\left(-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}\right)$$

o, finalmente

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}} \qquad (6)$$

Así se ve que las ecuaciones (5) y (6) que dan v e i, y que *son del mismo tipo,* resultan análogas exactamente a *la ecuación de las cuerdas vibrantes.*

Resolución. — Resolvamos, por ejemplo, la ecuación (6) para la corriente. La solución es

$$i = F(x + \gamma t) + G(x - \gamma t)$$

donde γ responde a la velocidad de propagación, siendo F y G funciones arbitrarias, definidas en cada caso por las condiciones iniciales o finales.

MAXWELL, por otra parte, ha demostrado que la velocidad de propagación $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ es igual a la velocidad de la luz (si $R_1 = 0$).

La expresión de i muestra que, *ya que la fuente de la corriente que está en el extremo del hilo de una corriente periódica,* las funciones F y G representan dos ondas que se propagan con la velocidad γ, la primera se aleja de la fuente y la segunda se dirige hacia la misma.

— Determinemos ahora las condiciones en los límites en el caso en que uno de los extremos del hilo se corta y aisla. En este punto, evidentemente la corriente es siempre nula, en cualquier momento, y se tendrá en este punto, tomando antes como origen este extremo aislado (sea $x = 0$)

$$F(\gamma t) + G(-\gamma t) = 0$$
$$F(\gamma t) = -G(-\gamma t)$$

lo que determina la forma de la función G; es igual a la función F variada de signo, y donde el valor γt ha cambiado de signo también.

— Por consiguiente, en cualquier punto del hilo deberá tenerse

$$G(-\gamma t) = -F[-(x - \gamma t)] = -F(-x + \gamma t),$$

lo que muestra que F es una onda incidente y G una onda reflejada; y lo mismo que en los tubos sonoros o en las cuerdas vibrantes, hay reflexión con cambio de signo. Finalmente se tendrá

$$i = F(x + \gamma t) - F(-x + \gamma t).$$

Caso del hilo aislado. — Supongamos un hilo en el espacio aislado en sus dos extremos, y de longitud l (fig. 56). Como la fuente de corriente (colocada en medio del hilo) produce una corriente sinusoidal $i = \mathrm{I} \operatorname{sen} \omega t$, la función F es en sí misma sinusoidal.

Para recorrer una distancia x la onda necesita un tiempo θ, por lo mismo la amplitud de la corriente en este lugar será idéntica a la que existía en la fuente un tiempo θ anterior (y remontándonos al pasado), es decir

$$i = \mathrm{I} \operatorname{sen} \omega(t - \theta) = I \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{\gamma}\right),$$

y esto para una de las ondas; para la otra bastará sustituir x por $-x$

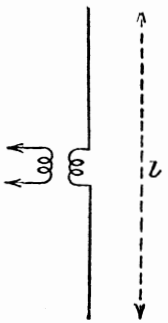


FIG. 56

— Volvamos ahora a nuestras dos funciones F y G, y tomando como origen uno de los extremos del hilo, pongamos (ya que la fuente es en sí misma sinusoidal, y transformando $x + t\gamma$ en ángulo):

$$\mathrm{F}(x + \gamma t) = \mathrm{A} \operatorname{sen} \frac{\omega}{\gamma}(x + \gamma t) = \mathrm{A} \operatorname{sen} \omega \left(t + \frac{x}{\gamma}\right) \tag{7}$$

de donde se obtiene idénticamente

$$\mathrm{F}(-x + \gamma t) = \mathrm{A} \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{\gamma}\right). \tag{8}$$

Lo que da

$$i = \mathrm{A}\left[\operatorname{sen} \omega \left(t + \frac{x}{\gamma}\right) - \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{\gamma}\right)\right].$$

Por último, transformando esta diferencia en producto, y poniendo $2\mathrm{A} = \mathrm{I}_0$, se obtiene

$$i = 2\mathrm{A} \operatorname{sen} \omega \frac{x}{\gamma} \cdot \cos \omega t = \mathrm{I}_0 \operatorname{sen} \omega \frac{x}{\gamma} \cdot \cos \omega t \tag{9}$$

El potencial v se consigue por la ecuación (4): derivando i con respecto a x e integrando con respecto a t.

Derivemos primeramente i con respecto a x

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \mathrm{I}_0 \cos \omega t \cdot \frac{\omega}{\gamma} \cos \omega \frac{x}{\gamma}$$

de donde

$$v = -\frac{1}{C_1}\int \frac{\partial i}{\partial x}\,dt = -\frac{1}{C_1}\int I_0 \cos \omega t \cdot \frac{\omega}{\gamma} \cos \omega \frac{x}{\gamma} \cdot dt$$

$$= -\frac{I_0 \omega}{C_1 \gamma} \cos \omega \frac{x}{\gamma} \int \cos \omega t\, dt$$

$$= -\frac{I_0}{C_1 \gamma} \cos \omega \frac{x}{\gamma} \cdot \operatorname{sen} \omega t = -\frac{I_0}{C_1} \sqrt{L_1 C_1} \cos \omega \frac{x}{\gamma} \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

$$v = -I_0 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cos \omega \frac{x}{\gamma} \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

Así, i era un cos ωt mientras que v es un sen ωt; igualmente i era un sen $\omega \dfrac{x}{\gamma}$ mientras que v es un $\cos \dfrac{x}{\gamma}$.

Se ve que, no solamente i y v varían sinusoidalmente en el tiempo y en el espacio, sino también están en cuadratura, a la vez en el tiempo y en el espacio: cuando uno es máximo el otro es nulo, obteniéndose así una sucesión de vientres y nudos a lo largo del hilo. Son ondas estacionarias, variables en el tiempo, pero fijas en el espacio.

En el hilo, forzosamente la corriente es siempre nula, pero la tensión v es máxima. Finalmente, la distancia de un nudo a un vientre es $\dfrac{\lambda}{4}$ (con $\lambda = \gamma T$).

Sobre estos principios funcionan las antenas de radio; las antenas especiales para ondas cortas; las de radar, así como un gran número de otros dispositivos.

Para $x = l$, i es siempre nulo sea cual sea t; por consiguiente se tendrá

$$\operatorname{sen} \omega \frac{l}{\gamma} = 0$$

de donde

$$\omega \frac{l}{\gamma} = \frac{2\pi l}{\gamma T} = K\pi,$$

se obtiene

$$\frac{2l}{\lambda} = K. \qquad (\text{con } K = 0, 1, 2, 3\ldots)$$

Por lo tanto, el hilo puede vibrar de diferentes formas y también sobre formas armónicas.

El período mayor es

$$T = \frac{\lambda}{\gamma} = \frac{2l}{\gamma},$$

y $\lambda = 2l$ significa la longitud de onda *fundamental,* por lo que se dice que *la antena vibra en semi-onda.*

Insistimos en que tal hilo es un circuito oscilante abierto.

Los valores máximos de la corriente y del potencial son I_0 e $I_0 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$, y si se calcula el cociente de V_{max} entre I_{max} se obtiene

$$\frac{V_m}{I_m} = Z \frac{I_0 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}}{I_0}$$

$$\boxed{Z = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}}$$

que se llama *impedancia característica* de la línea, y es constante e independiente de x

Nota. — El lector puede comprobar directamente que las ecuaciones (7) y (8) son las soluciones de la (6), calculando las derivadas segundas con respecto a x y t, y sustituyendo a continuación estos valores en la ecuación (6).

7. 9. Otra forma de hallar la ecuación de V e I a lo largo del hilo. — Hay un método más directo para calcular los valores de la corriente y del potencial a lo largo del hilo, y vamos a indicarlo para los que hagan objeciones sobre la forma en que se han calculado estos valores en el párrafo anterior. Aplicaremos a continuación el cálculo a un caso particular muy interesante.

— La hipótesis inicial es que la fuente produce una corriente sinusoidal, como es el caso real

$$i = I \operatorname{sen} \omega t.$$

La tensión y la corriente varían a lo largo del hilo, y si continuamos llamando x a la distancia de un punto considerado al cabo libre

del hilo, buscaremos para satisfacer la ecuación con derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \tag{1}$$

poniendo, para el valor de la corriente a la distancia x

$$i = f(x) \cdot \operatorname{sen} \omega t \tag{2}$$

donde $f(x)$ es una función desconocida, que vamos a calcular.

Derivemos esta ecuación con respecto a t:

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \omega f(x) \cos \omega t$$

y

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^3} = -\omega^2 f(x) \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 i$$

Por otra parte, derivemos la misma ecuación con respecto a x:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = f'(x) \operatorname{sen} \omega t$$

y

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = f''(x) \operatorname{sen} \omega t.$$

Sustituyamos estos valores en la ecuación (1), obteniéndose

$$-\omega^2 f(x) \operatorname{sen} \omega t = \gamma^2 f''(x) \operatorname{sen} \omega t$$

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{\gamma^2} f(x) = 0$$

o poniendo

$$\lambda = \gamma T = \gamma \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f''(x) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 f(x) = 0,$$

ecuación diferencial de segundo orden, incompleta, y sin segundo miembro. Su solución es

$$f(x) = \mathrm{M} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \varphi\right)$$

o más bien

$$= \mathrm{A} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda} + \mathrm{B} \cos \frac{2\pi x}{\lambda}. \tag{3}$$

Las constantes A y B serán determinadas por las condiciones en los límites, como va a verse en un ejemplo.

Por último, tendremos

$$i = \mathrm{I}\left(\mathrm{A}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi x}{\lambda} + \mathrm{B}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\mathrm{sen}\,\omega t$$

7. 10. Ejemplo importante. — *Caso de un hilo aislado ligado al suelo por uno de sus extremos (antenas de radio). Producción de ondas estacionarias* (fig. 57).

— La fuente está en la base de la antena. Por consiguiente calculemos los valores de la coorriente y del potencial a la distancia x del cabo libre, y llamemos l a la longitud del hilo. Se tendrá en un punto P cualquiera

$$i = f(x) \cdot \mathrm{sen}\,\omega t.$$

Ahora bien, para $x = 0$, $i = 0$ (en el cabo libre la corriente es siempre nula), por consiguiente la ecuación anterior resulta

$$f(0) = 0.$$

La ecuación (3) da entonces, para $x = 0$

$$0 = 0 + \mathrm{B}, \quad \text{de donde} \quad \mathrm{B} = 0.$$

Por otra parte, para $x = l$, $i = \mathrm{I}\,\mathrm{sen}\,\omega t$, donde está la fuente, de donde

$$f(l) = i = \mathrm{I}\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

por lo mismo se tiene

$$i = \mathrm{I}\,\mathrm{sen}\,\omega t = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi l}{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

y, para $x = l$

$$\mathrm{I} = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi l}{\lambda}.$$

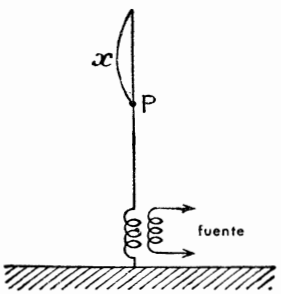


FIG. 57

La ecuación general de la corriente viene dada entonces por la ecuación (2)

$$i = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \mathrm{sen}\,\omega t. \qquad (4)$$

— Situémonos en el instante en que la corriente pasa por su valor máximo, en este momento $\omega t = 1$ y se tiene:

$$\mathrm{I} = \mathrm{A}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi x}{\lambda}.$$

La corriente varía sinusoidalmente a lo largo del hilo, y será máxima para $x = l$:

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi l}{\lambda} = \pm 1 \qquad \text{de donde I = A,}$$

lo que nos dará

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = (2K + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$l = (2K + 1)\frac{\lambda}{4}.$$

Estos se llaman *vientres de la corriente.*

La antena puede vibrar de varias formas, y la más sencilla se obtiene para $K = 0$, de donde $l = \frac{\lambda}{4}$, esta es *la antena a cuarto de onda,* bien conocida en radio.

Hay también puntos donde la corriente es nula, obteniéndose al anular $\operatorname{sen} \frac{2\pi l}{\lambda}$; sea para $\frac{2\pi l}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi \ldots = K\pi$

de donde

$$l = K\frac{\lambda}{2}.$$

Estos se denominan los *nudos de la corriente.*

—La sucesión de nudos y vientres, que están fijos en el espacio, pero variables en el tiempo, constituyen las *ondas estacionarias.*

Para la antena cuarto de onda, se tiene un solo nudo de corriente, en el extremo libre del hilo, y un solo vientre, en el extremo ligado al suelo (fig. 58.

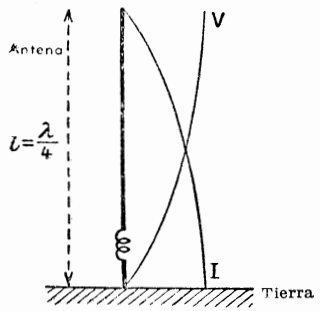


FIG. 58

Cálculo del potencial.—La ecuación inicial

$$C_1 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}$$

va a darnos el potencial v a lo largo del hilo: basta derivar i con respecto a x, después integrar con respecto a t, como se ha hecho antes para la antena semi-onda,

$$\frac{\partial i}{\partial x} = A\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\operatorname{sen}\omega t$$

y

$$v = -\frac{1}{C_1}\int A\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot \operatorname{sen}\omega t\,dt + K$$

$$= \frac{2\pi A}{C_1\omega\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t + K$$

ahora bien, para $x = l$, $v = 0$, sea cual sea t, por lo tanto $K = 0$. El coeficiente de $\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$ es, evidentemente, el valor máximo de v, sea V_0, de donde

$$v = V_0\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t.$$

así, v e i están en cuadratura a la vez en el tiempo y en el espacio: *cuando uno es máximo, el otro es nulo* (fig. 58). La tensión es máxima al fin de esta línea cuarto de onda, y mediante ciertas condiciones, tal tensión puede ser de varios millones de voltios, como lo ha mostrado el gran ingeniero norteamericano TESLA.

Vuelven a obtenerse para v e i los mismos valores que se consiguieron antes.

— Además hay analogía completa con los tubos sonoros cerrados: si $l = \frac{\lambda}{4}$, la vibración es máxima en la base y nula en el final. Se aplican las mismas ecuaciones, a condición de sustituir i por la amplitud de la vibración y v por la presión del aire.

— Estas mismas ecuaciones aplícanse asimismo en la vibración de las cuerdas, así como en otros fenómenos vibratorios.

— Pero el estudio que acabamos de hacer para la propagación de la corriente eléctrica en toda la longitud de un hilo tiene gran número de aplicaciones, en Electricidad, Radio, Televisión y Radar; por ello, dado el desarrollo sorprendente (acaba de empezar tan sólo) de estas últimas técnicas, lo hemos señalado aquí y se ha dado una base matemática elemental.

El estudio matemático detallado se hace actualmente por medio de *cálculo de imaginarias*, y el lector que desee iniciarse en este cálculo, y servirse del mismo, puede hacerlo en el Tomo I de nuestra obra *Teoría y Práctica de los circuitos de Electrónica y amplificadores* (Ediciones Dunod, 5.ª edición), donde hallará gran número de ejemplos y aplicaciones.

CAPITULO VIII

INTRODUCCION AL ESTUDIO DEL POTENCIAL

La noción de potencial se ha introducido en Mecánica, Física, Termodinámica, Electricidad, así como en otros campos. Es muy importante, muy sutil, y también muy útil. Es una noción esencialmente matemática, y la trataremos en este curso, desde un punto de vista muy general, y a título de introducción para un estudio posterior más intenso y extenso.

— Empezaremos por la expresión analítica del trabajo de una fuerza.

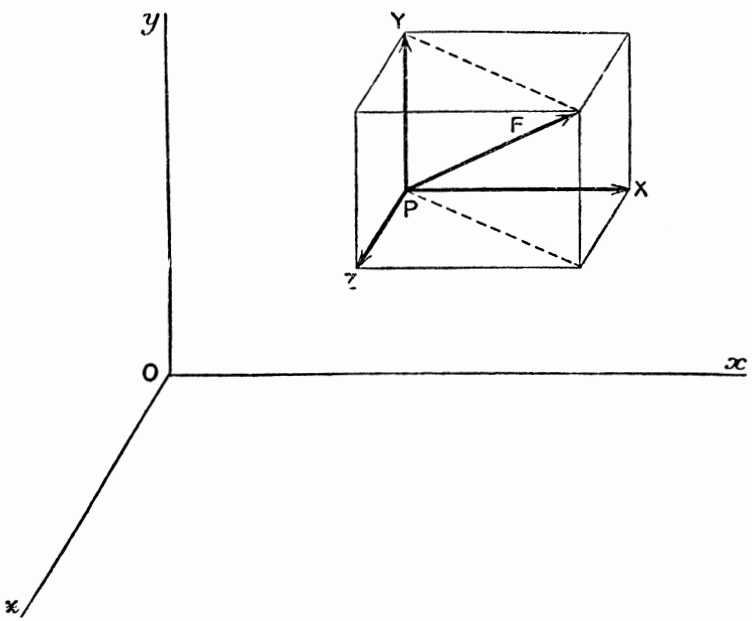


FIG. 59

8. 1. Expresión analítica del trabajo elemental de una fuerza. — Sea una fuerza F aplicada en un punto P y sean los tres ejes de coordenadas en el espacio, Ox, Oy y Oz formando el tiedro de la figura 59.

Llamemos x, y y z las coordenadas del punto P y proyectemos la fuerza F, vista en perspectiva, sobre los tres ejes: la proyección de F es X sobre el eje Ox, Y sobre el eje Oy y Z sobre la Oz.

Supongamos que el punto P se desplaza dl en el espacio, proyectemos dl sobre los tres ejes, lo que dará dx sobre Ox, dy sobre Oy y dz sobre Oz.

Ya que F se desplaza, hay un trabajo cumplido, y un teorema de Mecánica dice que «el trabajo de una fuerza es igual a la suma de los trabajos de sus componentes», es decir, «la suma de los trabajos de las proyecciones de esta fuerza sobre los tres ejes».

Ya que X se desplaza en dx, Z en dz e Y en dy, el trabajo elemental de la fuerza F es

$$dW = Xdx + Zdz + Ydy,$$

y el total, cuando P sigue una trayectoria cualquiera pasando de P a P', será

$$W = \int_P^{P'} Xdx + Zdz + Ydy.$$

8. 2. Campo de fuerzas. La gravedad es el ejemplo más sencillo de una fuerza, y el espacio que envuelve la Tierra es todo él un campo de fuerzas. Cualquier campo es atraído hacia el centro de la Tierra.

Asimismo, el espacio que encierra un imán es campo de fuerzas, ya que una partícula de hierro está en el mismo sometida a una fuerza; también el espacio que circunda un cuerpo electrizado (por frotamiento, por ejemplo) es otro campo de fuerzas, pues una carga eléctrica cualquiera, colocada en los alrededores de este campo, soporta una fuerza atractiva o una repulsiva.

Supongamos que la fuerza depende *solamente de la posición del punto,* y no de la velocidad o del tiempo.

— Sábese que la *intensidad* de un campo de fuerzas, en un punto cualquiera, es numéricamente igual a la fuerza que ejerce sobre la unidad de masa (o de carga) colocada en el punto considerado.

Analíticamente, queda definido un campo de fuerza si se conoce el valor y el sentido de cada fuerza, estando determinados los tres componentes de la misma por tres funciones

$$X = f(x, y, z)$$
$$Z = \varphi(x, y, z)$$
$$Y = g(x, y, z).$$

Se llama *línea de fuerza del campo* una línea donde la fuerza, correspondiente a cada punto de la línea, es tangente a la misma.

— En el caso de la gravedad, las fuerzas del campo son constantes en magnitud y dirección: el campo de la gravedad es uniforme, las líneas de fuerza son verticales, y por eso se tiene

$$X = 0, \qquad Z = 0, \qquad Y = -mg.$$

En realidad, para dos puntos distantes 1.000 metros entre sí y situados a la misma altitud, las verticales en estos dos puntos no son paralelas. Forman un ángulo de 32″.

8. 3. Caso en que el trabajo total no depende más que de las posiciones inicial y final. — Se encuentran con frecuencia campos de fuerza en que el trabajo total de la fuerza P que se desplaza, no depende más que de la posición inicial y final, y no del camino recorrido. Se sabe que este es el caso de la gravedad, así como el de las fuerzas electrostáticas que se ejercen en los alrededores de un cuerpo electrizado (Véase el Tomo IV, donde, en un ejemplo de aplicación de integrales, hemos calculado el trabajo de la fuerza electrostática y *definido el potencial del mismo nombre*).

— Todos estos campos se fundan en el teorema fundamental siguiente, que se demuestra en Mecánica, y que es una ampliación de lo que ya hemos visto a propósito de las diferenciales totales:

«*Teorema.* — Para que el trabajo total de una fuerza F de un campo, dependa únicamente de las posiciones inicial y final, es necesario y suficiente que el trabajo elemental

$$dW = X dx + Y dy + Z dz$$

sea la diferencial total de una cierta función $U(x, y, z)$ de las coordenadas del punto.»

— Además este teorema se refiere al hecho, estudiado en el Tomo IV de este Curso, de que una integral tomada a lo largo de una curva, solamente depende de los límites, y no del camino recorrido, si la expresión a integrar es una diferencial total exacta.

8. 4. Función de fuerzas. Potencial. — Cuando el trabajo elemental de una fuerza F en un campo es la diferencial total de una función $U(x, y, z)$, esta función U se llama *función de fuerzas.*

Se dice también que el campo de fuerzas F se deriva de la función U. Por consiguiente, puede escribirse, como consecuencia de la definición de diferencial total (Véase el Tomo II).

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial z}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz.$$

Entonces, se deducen para las tres proyecciones de la fuerza F, las expresiones

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Definición del Potencial. — Se dice que, en este caso, *las fuerzas F del campo proceden de un potencial,* o de una función potencial $V(x, y, z)$ que es igual a la función de fuerzas cambiada de signo

$$V = -U(x, y, z).$$

Puede escribirse, pues, para las proyecciones de la fuerza F

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

relaciones utilizadas en electrostática (Véase el Tomo IV) para el el cálculo preciso del potencial en un punto de un campo.

También se utilizan las mismas definiciones en los campos magnéticos, termodinámica, mecánica de fluidos, etc.

En resumen, una fuerza admite un potencial, cuando el trabajo de esta fuerza y su punto de aplicación pasan de un punto A *a otro* B *del campo de fuerzas, siendo independiente del camino recorrido.*

El potencial no es un vector, éste no tiene una magnitud dirigida: *en un punto de un campo, el valor del potencial es un número, es una magnitud en escala.*

Las líneas donde el potencial es constante se llaman *líneas equipotenciales,* y, cuando la fuerza se desplaza sobre tal línea, el trabajo correspondiente es nulo.

— Por otra parte, vamos a precisar estas nociones en el caso *del potencial newtoniano,* que es una excelente introducción al estudio general de los campos de fuerza y del potencial en general, así como a las ecuaciones de MAXWELL, utilizadas en Electricidad y Radio.

8. 5. El potencial «newtoniano». — Se conoce en Electricidad la ley magnética de *Coulomb*

$$f = 10^{-7} \frac{mm'}{r^2}$$

y la de electrostática

$$f = 9 \times 10^9 \frac{qq'}{r^2}$$

donde las fuerzas varían en razón inversa al cuadrado de la distancia.

Es lo mismo que en Mecánica para las masas materiales, y es bien conocida la ley fundamental de la atracción universal, enunciada por NEWTON:

$$f = \mathrm{K} \frac{mm'}{r^2},$$

donde K es la constante de gravitación.

— Consideremos en el espacio, tres ejes, Ox, Oy y Oz, y supongamos que en O existe una unidad de masa material. Supongamos que en otro punto del espacio P de coordenadas x, y, z (fig. 60), existe

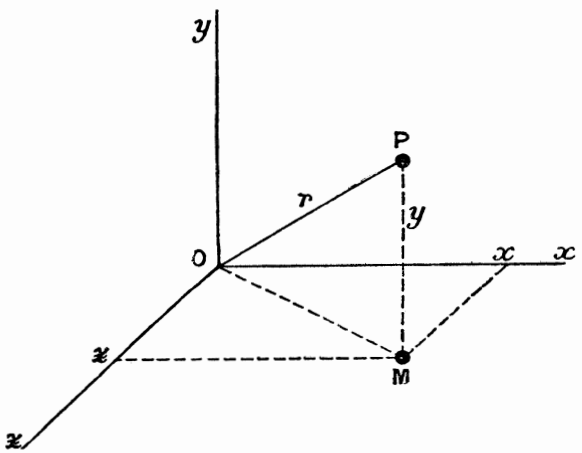


FIG. 60

también otra unidad de masa material. Habrá, por consiguiente, una fuerza «newtoniana» atractiva.

Sea r la distancia entre las dos masas. Se tendrá

$$r^2 = OM^2 + y^2 = (x^2 + z^2) + y^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Derivemos esta función de tres variables independientes.

Obtendremos

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{r},$$

igualmente, se tendrá

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

— En Mecánica se llama *potencial newtoniano* (representado por la letra U) y *engendrado por la unidad de masa,* la expresión

$$U = \frac{1}{r}. \qquad \left(\text{En general, } U = \frac{m}{r}\right)$$

Derivemos esta función con respecto a las tres coordenadas (con $r = f(x, y, z)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{dU}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = -\frac{y}{r^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dU}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{z}{r} = -\frac{z}{r^3}.$$

Ahora bien $\frac{x}{r}$ $\frac{y}{r}$ y $\frac{z}{r}$ son los cosenos de los ángulos que forma r con los tres ejes, y $\frac{1}{r^2}$ es la fuerza atractiva (el signo — procede de que F se dirige hacia O, en sentido opuesto al que crece r).

Así se ve que las tres derivadas parciales anteriores representan la proyección sobre los tres ejes de la fuerza atractiva F, que se dirige según r, resultante de la proximidad de estas dos unidades de masa.

— Calculemos ahora $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, escribiendo, para simpli-

ficar los cálculos, $\frac{\partial U}{\partial x}$ así como la otras dos primeras derivadas en forma de producto uv:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -x \cdot r^{-3}$$

Así se tendrá

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= r^{-3}(-1) + (-x)\frac{dv}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{r^3} - x(-3r^{-4}) \cdot \frac{x}{r}$$

$$= -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

Un cálculo idéntico daría

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}.$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

Calculemos ahora la suma de estas tres segundas derivadas

$$-\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5}(x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} \cdot r^2$$

o, finalmente,

$$-\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} = 0.$$

— En resumen, se obtiene la curiosa relación, hallada por LAPLACE.

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0}$$

que, simbólicamente, se escribe a menudo

$$\Delta U = 0.$$

Esta fórmula aplícase no solamente para las fuerzas «newtonianas», sino también en Electricidad, Electrostática, Magnetismo, estudio de la transmisión del calor, propagación de ondas, etc.

En sentido inverso, la integral de la anterior ecuación de LAPLACE, que es una ecuación con derivadas parciales de segundo orden, es casi una constante

$$U = \frac{1}{r}$$

o bien $\frac{m}{r}$ en el caso general.

CAPITULO IX

INTRODUCCION AL ESTUDIO DE LA DISTRIBUCION DE LOS CAMPOS

A título de aplicación de las ecuaciones con derivadas parciales y como introducción al estudio de las célebres ecuaciones de MAXWELL, vamos a calcular la expresión infinitesimal de las leyes de distribución de los campos.

Tal estudio puede aplicarse en particular a los campos electrostáticos y electromagnéticos, y sirve, en particular, en la propagación de las ondas.

9. 1. Primera ley. Ley relativa al flujo. — A fin de generalizar, y no haciendo por el momento ninguna hipótesis sobre estos campos, consideremos un vector F, variable en cada punto del espacio.

— Elijamos un sistema de tres ejes de coordenadas Ox, Oz y Oy. Descompongamos este vector F en sus tres componentes: X sobre el eje Ox, Z sobre el Oz e Y sobre el Oy (en la figura 61 se ve F en perspectiva y *delante* de la página).

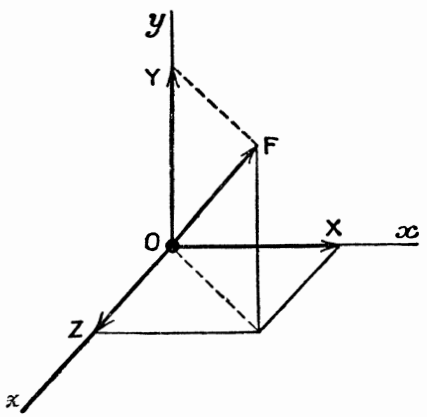


FIG. 61

—Consideremos ahora un pequeñísimo paralelepípedo recto, a partir del punto O, del cual los lados son dx, dz y dy; su volumen es $dx \cdot dz \cdot dy$ (fig. 62).

Se llama flujo de fuerza, a través de una superficie S, el producto de S por la componente de la fuerza, perpendicular a la superficie.

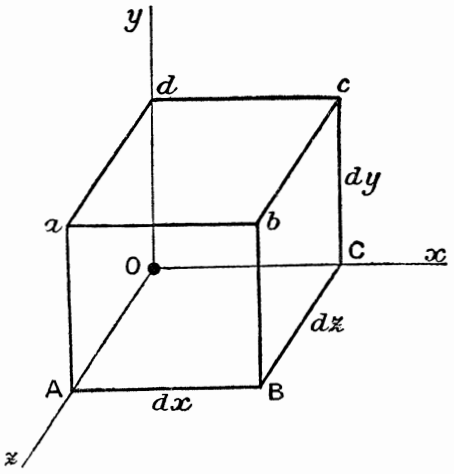


FIG. 62

—Vamos a calcular el flujo total que sale por la superficie exterior de este paralelepípedo.

Precisemos bien los valores de las componentes de F, ya que F es variable en todos los puntos del espacio: en el punto O las componentes de F son, como ya hemos dicho, X, Z e Y. Pero variando x en dx, z en dz e y en dy, estas componentes se convierten en

$$\text{sobre el eje de las } x: \quad X + \frac{\partial X}{\partial x}\, dx,$$

$$\text{sobre el eje de las } z: \quad Z + \frac{\partial Z}{\partial z}\, dz,$$

$$\text{sobre el eje de las } y: \quad Y + \frac{\partial Y}{\partial y}\, dy,$$

conforme al principio y a la notación de las funciones de varias variables independientes (Véase el Tomo II, capítulo XI).

Adoptaremos la convención de que el flujo saliente es positivo y el entrante negativo.

El flujo que entra por el lado OA*ad* es

$$\Phi_x = -\mathrm{X} \cdot d\mathrm{S} = -\mathrm{X} \cdot dz\, dy$$

y el que sale por la cara paralela B*bc*C es

$$\Phi_x + d\Phi_x = +\left(\mathrm{X} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}\, dx\right) \cdot dz\, dy.$$

La suma algebraica será

$$d\Phi_x = +\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}\, dx\, dy\, dz.$$

Igualmente, el flujo que entra por la cara OC*cd* será

$$\Phi_z = -\mathrm{Z} \cdot d\mathrm{S} = -\mathrm{Z} \cdot dx\, dy,$$

y el que sale por la paralela AB*ba* es

$$\Phi_z = d\Phi_z = +\left(\mathrm{Z} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}\, dz\right) \cdot dx\, dy,$$

y la suma algebraica por lo tanto

$$d\Phi_z = +\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Finalmente, el que entra por la cara horizontal ABCO es

$$\Phi_y = -\mathrm{Y} \cdot d\mathrm{S} = -\mathrm{Y} \cdot dx\, dz,$$

el que sale por la paralela *abcd* es

$$\Phi_y + d\Phi_y = +\left(\mathrm{Y} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}\, dy\right) dx\, dz,$$

la suma algebraica será

$$d\Phi_y = +\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}\, dx\, dy\, dz.$$

El flujo total que sale de este paralelepípedo es, por consiguiente,

$$d\Phi = d\Phi_x + d\Phi_z + d\Phi_y$$

$$\boxed{d\Phi = \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\right) dx\, dy\, dz} \qquad (1)$$

Supongamos, para precisar, que se trata de un campo electrostático E:

$$F = E,$$

se tendrá para las componentes de este campo:

$$X = E_x \qquad Z = E_z \qquad Y = E_y,$$

y si se llama V el potencial, se sabe que el campo es la derivada cambiada de signo del potencial, teniéndose así

$$X = E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Z = E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad Y = E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

La ecuación (1) se convierte entonces en

$$\boxed{d\Phi = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) dx\, dz\, dy} \qquad (2)$$

9. 2. Aplicaciones. — Apliquemos esta fórmula a la electricidad, utilizando el teorema de GAUSS: *el flujo total que sale por la superficie exterior de un volumen cerrado es igual a* $k\sum q$ *(en el aire), donde* $\sum q$ *es la suma algebraica de las cargas eléctricas interiores a este volumen* ($k = 1 : 8{,}85 \times 10^{-12}$).

— *Primer caso.* — Se está en un medio donde hay cargas eléctricas libres. Llamemos ρ a la densidad cúbica de las cargas eléctricas, es decir, el cociente de la carga por el volumen.

La carga total contenida en el elemento $dx\, dy\, dz$ es entonces

$$dq = \rho \cdot dx\, dy\, dz.$$

El teorema de GAUSS nos da

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) dx\, dy\, dz = k\rho\, dx\, dy\, dz$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -k\rho}$$

que es la fórmula de POISSON, en el aire.

En un aislante se tendrá $-\frac{k\pi}{\varepsilon}$.

— *Segundo caso.* — Se está en un medio aislado donde no hay cargas libres, $\rho = 0$ y queda

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0}$$

que se llama *la laplaciana,* y que se escribe abreviadamente

$$\Delta V = 0.$$

Esta ecuación ha permitido a LANGMUIR y CHILD hallar la ecuación de la lámpara diodo de radio, es decir, la ecuación que da la corriente en placa en función de la tensión.

Para los que preguntan: «¿Para qué sirve todo esto?» damos el cálculo, a título de aplicación.

— Sea un cátodo caliente, de tungsteno, que se supone plano: y sea una placa P paralela, en el vacío. LANGMUIR ha comprobado que para una temperatura determinada en el cátodo, hay una tensión en la placa por encima de la cual la emisión electrónica no aumenta; la corriente de la placa permanece, por consiguiente, constante (figura 63): nos encontramos en la saturación y la placa atrae todos los electrones salidos del cátodo.

— Coloquémonos a la distancia x del cátodo, donde V es el potencial y llamemos

ρ la densidad cúbica de carga a esta distancia,

v la velocidad de los electrones en el plano,

m la masa de un electrón,

e la carga de un electrón,

i la intensidad por cm², es decir, $i = \rho v$.

Si el potencial a la distancia x es V, se tiene, igualando los dos valores de la energía de un electrón

$$\frac{1}{2} m v^2 = eV.$$

Pero se tiene (ya que aquí no hay más que una variable, la distancia x):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k\rho = 4\pi \frac{i}{v} = \frac{ki\sqrt{m}}{\sqrt{2eV}}$$

$$= \mathrm{K} i V^{-\frac{1}{2}}.$$

Multipliquemos los dos miembros por $2\frac{\partial V}{\partial x}$

$$2\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2\,Ki\overline{V}^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial V}{\partial x},$$

e integrando

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 = K'i\overline{V}^{\frac{1}{2}} + C.$$

Se admite que la constante es nula para $V = 0$, de donde

$$\frac{\partial V}{\partial x} = a\overline{V}^{\frac{1}{4}}\overline{i}^{\frac{1}{2}} \quad \text{o} \quad \overline{V}^{\frac{1}{4}}dV = a\overline{i}^{\frac{1}{2}}dx,$$

integrando de nuevo y elevando al cuadrado

$$\frac{16}{9}\overline{V}^{\frac{3}{2}} = a^2ix^2$$

Tomemos ahora para x la distancia del cátodo a la placa, a la que corresponde una tensión V_p, y, llamando A a un coeficiente de proporcionalidad conveniente, se obtiene la fórmula de LANGMUIR y CHILD:

$$i = AV_p^{3/2},$$

la figura 63 da, para diferentes temperaturas, la curva de esta función, donde se aprecia saturación cierta, no pudiendo absorber la placa más electrones que no emita el cátodo. La ecuación no se aplica más que antes de la saturación.

—La *laplaciana*

$$\Delta V = 0$$

tiene muchas otras aplicaciones, por ejemplo, en la propagación de los campos y de las ondas electromagnéticas, en la teoría analítica del calor, etc., pero no podemos tratarlas aquí.

9. 3. Segunda ley. Trabajo de los vectores. — Consideremos también nuestro vector-fuerza F del que las proyecciones sobre los tres ejes son X, Z, Y, y consideremos (fig. 64) tres contornos infinitamente pequeños construidos sobre *dx*, *dz* y *dy*.

— Calculemos lo que se llama muy impropiamente *la circulación del vector* F *sobre estos contornos*, es decir, el trabajo total

$$dW = \sum F \cdot dl.$$

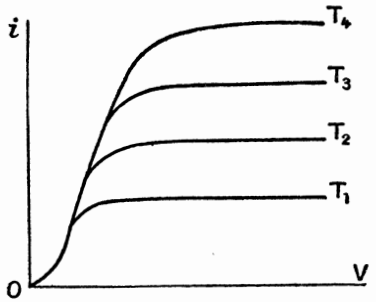


FIG. 63

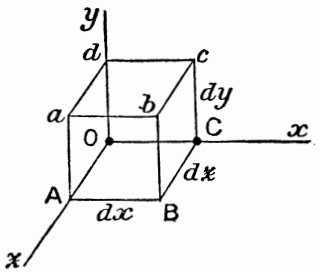


FIG. 64

Así se tendrá, empezando por el OABCO,

$$dW_1 = T_{OA} + T_{AB} + T_{BC} + T_{CO},$$

$$dW_1 = Z\,dz + \left(X + \frac{\partial X}{\partial z}\,dz\right) dx - \left(Z + \frac{\partial Z}{\partial x}\,dx\right) dz - X\,dx$$

$$= \frac{\partial X}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial Z}{\partial x}\,dx\,dz$$

$$dW_1 = \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dx\,dz$$

Igualmente, tendremos para los otros dos O*da*AO y OC*cd*O

$$dW_2 = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\,dz$$

$$dW_3 = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Utilizando estas fórmulas, aplicadas a los campos electrostático y electromagnético, así como a la corriente de desplazamiento en un aislante, MAXWELL ha establecido sus seis célebres ecuaciones, que, evidentemente, no podemos desarrollar aquí, pero que se hallarán expuestas clara y pormenorizadamente, en el Tomo III de nuestra obra «*Teoría y Práctica de los circuitos de Electrónica y amplificadores*». Allí se encontrarán también las consecuencias obtenidas, así como varias aplicaciones.

LISTA RECAPITULATIVA

DE LAS

FORMULAS DEL TOMO V

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Primer caso. **Ecuaciones en las que pueden separarse las variables:**

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = 0.$$

Si se pone

$$\int f(x)\, dx = \mathrm{F}(x),$$

la solución es, separando variables:

$$y = Ce^{-\mathrm{F}(x)}.$$

Segundo caso. **Ecuaciones homogéneas:**

Si ponemos

$$y = u \cdot x$$

se vuelve a una ecuación en la que pueden separarse las variables.

Tercer caso. **Ecuaciones lineales:**

Si se tiene

$$\mathrm{A}\frac{dy}{dx} + \mathrm{B}y = 0,$$

la solución es

$$y = Ce^{-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}x}.$$

Si tenemos

$$\mathrm{A}\frac{dy}{dx} + \mathrm{B}y = \mathrm{D},$$

se pone

$$\mathrm{B}y - \mathrm{D} = u,$$

y se obtiene:

$$u = Ce^{-\frac{B}{A}x}$$

de donde obtendremos

$$y = \frac{u + D}{B}.$$

Ecuaciones lineales con segundo miembro en función de x:

$$A\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = \varphi(x) \text{ o } B.$$

Resuélvese primeramente la ecuación sin segundo miembro, y si se pone

$$-\frac{1}{A} = K \quad \text{y} \quad \int f(x)\,dx = F(x),$$

tendremos

$$y = C \cdot e^{K \cdot F(x)}.$$

Se considera ahora C como una función desconocida de x (método de Lagrange), tómase la diferencial de este producto, se sustituye en la ecuación inicial, se simplifica, e integrando se calcula C, e y.

Ecuación de Bernoulli:

$$A\frac{dy}{dx} + My = P \cdot y^n$$

o

$$A\frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = \varphi(x) \cdot y^n.$$

Se divide todo por y^n, y se pone $y^{n-1} = z$. Se calcula dy y se vuelve a una ecuación lineal en la que se separan las variables, o bien se resuelve por el método de Lagrange.

Trayectorias ortogonales:

Si $f(x, y, a) = 0$ es la ecuación de una familia de curvas que dependen de un parámetro a, se elimina a entre esta ecuación y la diferencial:

$$dy = -\frac{f_x'}{f_y'}dx.$$

Se obtendrá una ecuación de la forma

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0$$

o

$$M\,dx + N\,dy = 0.$$

La ecuación de las trayectorias ortogonales es entonces:

$$M\,dy - N\,dx = 0.$$

Problemas importantes:

Carga de un condensador a través de una resistencia.

$$v = E\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right),$$

la intensidad de la corriente es:

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{CR}}.$$

y la constante de tiempo:

$$\theta = CR.$$

C en faradios
R en ohmios
θ en segundos.

Al cabo de $t = 4{,}6\,\theta$, se obtendrá $v = \frac{99}{100}E$.

Descarga de un condensador en una resistencia.

Se tiene

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{CR}} \quad \text{y} \quad v = E e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Al cabo de $t = 4{,}6\,\theta$, se obtendrá $v = \frac{E}{100}$.

Establecimiento de la corriente en una bobina de inductancia.

Tiénese

$$i = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

la constante de tiempo es

$$\theta = \frac{L}{R}.$$

L en henrys
R en ohmios
θ en segundos

Al cabo de $t = 4{,}6\,\theta$, tendremos $i = \frac{99}{100}I_0$.

Desaparición de la corriente en una bobina de inductancia.

Tenemos

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Al cabo de $t = 4{,}6\,\theta$, se tiene $i = \frac{I_0}{100}$.

Ley del interés compuesto.

Después de un tiempo t se posee una suma de dinero cuyo valor es

$$P = P_0 e^{Kt} \qquad \text{con} \qquad K = \frac{r}{100}$$

donde r es el interés anual.

Trabajo desarrollado por un gas que se comprime.

Si el gas sigue la ley

$$pv^n = \text{constante},$$

se tendrá

$$W = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}\right]$$

Presión atmosférica a la altura h.

Si admitimos la ley pv = constante, la presión a la altura h es:

$$p = pe^{-Kh}.$$

Movimiento de un proyectil en el aire.

Si la fuerza retardatriz es proporcional a la velocidad v y al cuadrado del diámetro D del proyectil

$$R = KvD^2,$$

el alcance del tiro es

$$x = \frac{V_0}{A} e^{A-t}$$

de donde

$$A = \frac{KD^2 g}{P}.$$

Ley de la caída de los cuerpos.

Si se admite que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad v(R = Kv), la velocidad al cabo de un tiempo t es:

$$v = \frac{P}{K}\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right)$$

donde m es la masa y P el peso.

Fórmula fundamental de la corriente alterna.

Se tiene

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \operatorname{sen} \omega t,$$

de donde

$$i = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}(R \operatorname{sen} \omega t - L\omega \cos \omega t) + Ke^{-\frac{R}{L}t}.$$

e

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \qquad \text{con} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R}.$$

Ecuaciones de las curvas adiabáticas de los gases perfectos.

$$pv^{\gamma} = \text{constante.} \qquad \left(\gamma = \frac{C}{c}\right)$$

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Ecuaciones incompletas:

1.º $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x).$$

Se integra dos veces seguidas.

2.º $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y).$$

Se multiplican los dos miembros por $2\frac{dy}{dx}dx$: el miembro de la izquierda es entonces la diferencial de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ se obtiene dy y se integra.

3.º $$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \qquad \text{o} \qquad f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Se pone $\frac{dy}{dx} = u$, y se vuelve a una ecuación de primer orden.

4.º $$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Se pone $\frac{dy}{dx} = u$ y se escribe:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot u,$$

y retórnase a la ecuación de primer orden

$$u\frac{du}{dy} = f(y, u)$$

que se integra inmediatamente.

Ecuaciones completas sin segundo miembro:

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = 0.$$

Se escribe inmediatamente la ecuación característica:

$$Ar^2 + Br + C + 0.$$

Hay tres casos:

1.º *Tiene dos raíces reales* r_1 *y* r_2, y se tiene:

$$y = K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}.$$

2.º *Tiene una sola raíz* $r = -\dfrac{B}{2A}$, y se tiene:

$$y = e^{rx}(mx + p).$$

3.º *Tiene dos raíces imaginarias* $r = \alpha \pm j\beta$, y se tiene:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

o

$$y = Me^{\alpha x} \operatorname{sen} (\beta x - \varphi).$$

Ecuaciones con segundo miembro en función de x:

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = f(x).$$

La solución general es la suma de la solución y_1 de la ecuación sin segundo miembro y de una solución particular y_2 de la ecuación con segundo miembro:

$$Y = y_1 + y_2.$$

Determinación de una solución particular y_2 *de la ecuación con segundo miembro.*

El segundo miembro es:

1.º *un polinomio en* x.

Si $C \neq 0$, y_2 es un polinomio del mismo grado.
Si $C = 0$, y_2 es x veces un polinomio del mismo grado.

2.º *una exponencial* $De^{\alpha x}$.

Si α tiene un valor cualquiera, se tiene $y_2 = Ke^{\alpha x}$.
Si α es una de las raíces de la ecuación característica, se tiene $y_2 = Mxe^{\alpha x}$.
Si α es raíz doble, se tiene $y_2 = px^2e^{\alpha x}$.

3.º *el producto de una exponencial por un polinomio en* x: $e^{\alpha x} \cdot P(x)$.

Si α tiene un valor cualquiera, se tiene $y_2 = z \cdot e^{\alpha x}$, donde z es un polinomio del mismo grado que $P(x)$.
Si α es raíz de la ecuación característica, z será x veces un polinomio del mismo grado.
Si α es raíz doble, z será x^2 veces un polinomio del mismo grado.

4.º *de la forma* $M \operatorname{sen} px + N \cos px$.

Se tomará

$$y_2 = \alpha \cdot \operatorname{sen} px + \beta \cos px.$$

Pero si $B = 0$ y si $C = Ap^2$ se tomará:

$$y_2 = x(\alpha \operatorname{sen} px + \beta \cos px).$$

Problemas de aplicación

Trayectoria de un proyectil:

$$y = -\frac{1}{2}\frac{gx^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

Curva del perro:

$$y = \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} - \sqrt{ax} + \frac{2a}{3}.$$

Movimiento de un punto atraído o repelido por un centro fijo O proporcional a la distancia.

1.º *Caso de atracción:*

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t.$$

2.º *Caso de repulsión:*

$$x = x_0 \operatorname{cosec} \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sec \omega t.$$

Sólido girando alrededor de un eje:

El ángulo de rotación es:

$$\theta = \theta_0 \operatorname{sen} \left(\sqrt{\frac{C}{I}}\, t - \varphi \right)$$

y el período es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}$$

donde I es el momento de inercia con respecto al eje.

Para el péndulo se tiene:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Fórmula general para calcular el período de un sistema oscilante:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{-f'(0)}}.$$

Período de un resonador acústico esférico:

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{zZ}}{Vs}$$

donde

z = Volumen de la tobera, s = sección de la tobera

Z = Volumen de la esfera, V = velocidad del sonido.

Fórmula de la flexión de las vigas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

donde

M = momento de flexión,

E = módulo de elasticidad,

I = momento de inercia de la sección S con respecto al eje que pasa por el centro de gravedad.

Frecuencia de vibración de un árbol de máquina que gira a gran velocidad.

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Fg}{P}}$$

$$P = \text{peso total del árbol y } F = \frac{48\,EI}{l^3}$$

l = distancia entre dos «paliers».

Descarga de un condensador en una bobina de inductancia.

La ecuación general de la diferencia de potencial entre los bornes del condensador es:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha\frac{dv}{dt} + \Omega^2 v = 0.$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Primer caso: $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (se tienen dos raíces reales).

Tendremos

$$i = \frac{VC\Omega^2}{2m}\left[e^{(m-\alpha)t} - e^{-(m+\alpha)t}\right]$$

con

$$m^2 = \alpha^2 - \Omega^2.$$

La descarga es aperiódica, e i pasa por un máximo.

Segundo caso: $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (considérase una raíz doble).

$$\alpha^2 - \Omega^2 = 0$$

y se tiene

$$i = CV\alpha^2 te^{-\alpha t}$$

que pasa también por un máximo.

Tercer caso: $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (se consideran dos raíces imaginarias).

Se tiene

$$m^2 = \Omega^2 - \alpha^2$$

e

$$\left| \begin{array}{l} i = CV\Omega e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \Omega t \\ v = Ve^{-\alpha t} \cos \Omega t \end{array} \right.$$

la descarga es *oscilante y amortiguada.*

El período es:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \backsim 2\pi\sqrt{LC} = \frac{2\pi}{\Omega},$$

de donde

$$LC\Omega^2 = 1 \qquad y \qquad \Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

El decrecimiento logarítmico es igual a:

$$\delta = \alpha T \qquad o \qquad \frac{\alpha}{F}.$$

El coeficiente de sobretensión es

$$Q = \frac{L\Omega}{R}$$

y tendremos

$$\delta = \frac{\pi}{Q}.$$

Cuadro móvil de los aparatos de medida.

Su movimiento se rige por la ecuación:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + K\frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0.$$

Si $4IC > K^2$, la solución es sinusoidal, y poniendo

$$\alpha = \frac{K}{2I} \qquad y \qquad \Omega^2 = \frac{C}{I} - \frac{K^2}{4I^2},$$

el ángulo de desviación viene dado por:

$$\theta = \theta_0 e^{-\alpha t} \operatorname{sen} (\Omega t - \varphi).$$

Lámpara oscilatriz de radio (de la que el circuito oscilante está en el circuito de la placa).

La corriente i en el circuito oscilante está en la ecuación:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + \left(R + \frac{L + Km}{C\rho}\right)\frac{di}{dt} + \frac{i}{C}\left(1 + \frac{R}{\rho}\right) = 0.$$

Pongamos

$$R' = R + \frac{L + Km}{C\rho},$$

y, si $R' = 0$, el período es

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

con

$$i = I \operatorname{sen} \Omega t.$$

Para que las oscilaciones se amortigüen, es preciso que

$$\rho CR + L \leqslant Km$$

que es *la condición límite de entretenimiento.*

Propagación de la corriente eléctrica alterna a lo largo de una línea (paralela al suelo), o entre dos hilos paralelos.

Entre el potencial V y la corriente I se tienen dos relaciones:

$$\frac{dV}{dx} = -jL\omega I$$

y

$$\frac{dI}{dx} = -jC\omega V,$$

lo que da

$$\frac{d^2I}{dx^2} + LC\omega^2 I = 0$$

y

$$\frac{d^2V}{dx^2} + LC\omega^2 V = 0$$

cuya solución es, para $x = l$:

$$V = A \operatorname{sen} Kl + B \cos Kl \qquad (K^2 = -LC\omega^2)$$

$$I = j\sqrt{\frac{C}{L}}\,(A \cos Kl - B \operatorname{sen} Kl).$$

Para una línea infinita se tiene:

$$V = V_0 e^{-jKx} \quad \text{e} \quad I = \sqrt{\frac{C}{L}}\,V_0 e^{-jKx}.$$

Siendo la velocidad de propagación

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Circuitos oscilantes acoplados, en oscilaciones libres.

En cada *circuito* existen las dos pulsaciones:

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1+k}} \quad \text{y} \quad \omega'' = \frac{\omega}{\sqrt{1-k}}$$

con

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ (circuitos idénticos).}$$

Transformador eléctrico con secundario en cortocircuito.

La inductancia propia del primario se convierte en:

$$L' = L_1 - \frac{m^2}{L^2},$$

y esta cantidad será nula si no hay fugas ($m = \sqrt{L_1 L_2}$).

Ecuaciones de segundo orden con derivadas parciales

Primer tipo:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = 0,$$

la solución es

$$y = F(z) + G(x).$$

Segundo tipo. Ecuación de las cuerdas vibrantes:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

la solución es

$$y = F(x + at) + G(x - at).$$

Tercer tipo. Ecuación de *Laplace*:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0,$$

la solución es

$$y = F(x + jz) + G(x - jz). \qquad (j = \sqrt{-1})$$

Aplicación de la ecuación del segundo tipo a la propagación de la corriente en la longitud de las líneas.

La solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2},$$

es

$$i = F(x + \gamma t) + G(x - \gamma t)$$

con γ, que es la velocidad de propagación:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Caso de un hilo aislado de longitud l:

$$i = I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{x}{\gamma} \cos \omega t$$

$$v = -I_0 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cos \omega \frac{x}{\gamma} \operatorname{sen} \omega t$$

i y v están en cuadratura en el tiempo y a lo largo del hilo, y se tienen ondas estacionarias.

La impedancia característica es

$$z = \frac{V_{max}}{I_{max}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

Caso de un hilo de longitud l ligado al suelo por un extremo:

$$i = I_0 \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \operatorname{sen} \omega t$$

$$v = V_0 \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \cos \omega t.$$

Función "Potencial". La relación de *Laplace* es:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

se tiene

$$\Delta U = 0$$

Distribución de los campos.

El flujo total que sale por un paralelepípedo de lados dx, dy y dz es, si V es el potencial:

$$d\Phi = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz.$$

Fórmula de Poisson, en el aire:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{8{,}85 \times 10^{-12}}$$

donde ρ es la densidad cúbica de las cargas eléctricas.

Fórmula de Langmuir (sobre emisión electrónica).

La corriente en placa es igual a

$$i_p = A \cdot V_p^{3/2}$$

donde V_p es la tensión en placa y A una constante que depende de la naturaleza del cátodo y de las dimensiones de éste.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS A RESOLVER

CAPITULO PRIMERO

Partiendo de las funciones siguientes, obtener las ecuaciones diferenciales resultantes, es decir, las ecuaciones entre $\frac{dy}{dx}$ e y:

1-1. $y = Ax$.

1-2. $y = Be^x$.

1-3. $y = A \operatorname{sen} x$.

1-4. $y = \operatorname{sen} (x + A)$.

1-5. $y = Ax^2 + Bx + C$.

1-6. $y = A \cos ax + B \operatorname{sen} ax$.

1-7. $y = Cx^2 + K^2$.

1-8. $y = Ae^{2x} + Be^x + C$.

Representar los problemas siguientes en forma de una ecuación diferencial:

1-9. En cada punto de una curva la subtangente es igual a la suma de las dos coordenadas de este punto.

1-10. El número de desintegraciones que se producen cada segundo en una muestra de radio es proporcional al número de átomos de radio existentes en el instante considerado.

1-11. La población de una ciudad crece con una velocidad proporcional a su valor actual x, y a su diferencia entre 200.000 y su valor actual.

1-12. En un gas la velocidad de variación de la presión p en función del gas, es proporcional a dicha presión y varía en razón inversa al cuadrado de la temperatura.

Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.º Ecuación en la que pueden separarse las variables

1-13. $\operatorname{sen} x\, dy = y\, dx.$

1-14. $\dfrac{dy}{dx} = xy.$

1-15. $\dfrac{dy}{dx} - 1 = y.$

1-16. $x\dfrac{dy}{dx} = y + xy.$

1-17. $x^2y^3 - 4x^2 = (x^2y^2 - 9y^2)\dfrac{dy}{dx}.$

1-18. $\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y - \cos^2 x \cos^2 y \dfrac{dy}{dx} = 0.$

1-19. $y^2\, dx = (x + 1)\, dy.$

1-20. $x^2y\, dy = \sqrt{1 - y^2}\, dx.$

1-21. $x\, dy + 2y\, dx = xy\, dy.$

1-22. $\dfrac{dx}{dt} = (a - x)^2$ (calcular la constante si, para $x = 0$, se tiene $t = 0$).

1-23. $\dfrac{dx}{dt} = (a - x)(b - x)$, calcular $t = f(x)$.

1-24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + y^2}{xy(1 + x^2)}.$

1-25. $(x^2 - 4)\, dy - y\, dx = 0.$

1-26. $(1 + \theta^2)\, dt - t^{1/2}\, d\theta = 0$ (calcular $\theta = f(t)$).

1-27. $\sqrt{1 - x^2}\, dy + \sqrt{1 - y^2}\, dx = 0.$

1-28. $(x - y^2x)\, dx + (y - x^2y)\, dy = 0.$

1-29. $(t^2\theta + t)\, d\theta + (t\theta^2 - \theta)\, dt = 0.$

1-30. $\dfrac{dy}{dx}(1 + x^2) + y^2 = 1.$

1-31. $(x^2 - y^4)\dfrac{dy}{dx} = xy$ (se pondrá $x = u \cdot y$).

1-32. $x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = A + y^2.$

1-33. $(1 + x^2)\,dy = (1 + y^2)\,dx$ y demostrar que la solución es una familia de hipérbolas equiláteras.

1-34. $x\dfrac{dy}{dx} - y = \dfrac{y^3}{4}$. Hallar el valor de la constante para que la curva pase por el punto $y_0 = \dfrac{5}{2}$, $\quad x_0 = 5$.

1-35. $y = \operatorname{Log}\dfrac{dy}{dx}$.

1-36. $dx(1 - y^2) + dy(1 - x^2) = 0$.

2.° Ecuaciones homogéneas

1-37. $x\dfrac{dy}{dx} - 2y + x = 0$.

1-38. $(x^2 - y^2)\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$.

1-39. $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1-40. $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

1-41. $x\,dy + (x + y)\,dx = 0$.

1-42. $y^2\,dx = (x^2 + 2xy)dy$.

1-43. $(2x - y)\,dy = (x - 2y)\,dx$.

1-44. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x}$.

1-45. $(x - 4y)\,dx + (6y - x)\,dy = 0$.

1-46 $\theta^2 + t^2\dfrac{d\theta}{dt} = t\theta\dfrac{d\theta}{dt}$.

1-47. $y^2x\,dy - (x^3 + y^3)\,dx = 0$.

1-48. $t\,ds + (t - s)\,dt = 0$.

1-49. $(y - x)\,dy + (x + y)\,dx = 0$.

Integrar las ecuaciones homogéneas siguientes y trazar las curvas $y = f(x)$:

1-50. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x^2} - 1}$.

1-51. $2x^2\dfrac{dy}{dx} - y^2 = 4xy$.

1-52. $2xy\dfrac{dy}{dx} + 4x^2 = y^2$, y definir la naturaleza de las curvas.

1-53. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - a\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$

1-54. Resolver la ecuación

$$x\left(x + 4y\frac{dy}{dx}\right) = my^2$$

y discutirla para $m = 0$, $m = 2$ y $m = 4$.

1-55. Integrar la ecuación

$$2x^2\frac{dy}{dx} - y^2 = 4xy$$

y trazar la curva que pasa por el punto $x = 1$, $y = 1$.

1-56. $x(x + y)\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0.$

1-57. $x(y - x)\dfrac{dy}{dx} - y^2 = 0.$

1-58 $x\,dy - y\,dx = \sqrt{y^2 - x^2}\,dx.$

3.º **Ecuaciones lineales sin segundo miembro**
(o con segundo miembro constante)

1-59. $\dfrac{dy}{dx} + ye^x = 0.$

1-60. $\operatorname{Log}\dfrac{dy}{dx} - y = 0.$

1-61. $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1.$

1-62. $x^2\dfrac{dy}{dx} + y = 1.$

1-63. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1.$

1-64. $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$

1-65. $x\dfrac{dy}{dx} + y =$

4.° Ecuaciones lineales con segundo miembro variable

1-66 $\dfrac{dy}{dx} - x^3 = xy.$

1-67. $\dfrac{dy}{dx} + y = x^2.$

1-68. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 - 3x + 5$

1-69. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \operatorname{sen} x.$

1-70. $\dfrac{dy}{dx} = x + y.$

1-71. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{xy}{1 + x^2} = x.$

1-72. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x \operatorname{Log} x} = \dfrac{1}{x}.$

1-73. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3 - 2xy}{x^2}.$

1-74. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1 + x}{x}.$

1-75 $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = 4x.$

1-76. $\dfrac{dy}{dx} - ay = e^{bx}$, y discutir.

1-77. $\dfrac{dy}{dx} \operatorname{sen} x - y \cos x = \operatorname{tg} x.$

1-78. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = -y \cos x$

1-79. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{(x + 1)} = (x + 1)^{5/2}.$

1-80. $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 1 + x.$

1-81. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{ay}{x} = e^x x^a.$

1-82. $x^2\dfrac{dy}{dx} + y = 2xy + x^2.$

1-83. $x\dfrac{dy}{dx} - 3y = x^2$

1-84 Integrar, y trazar la curva $y = f(x)$ que pase por el punto $x=1$, $y=0$:

$(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} - 1 = -xy.$

1-85. Integrar, y trazar la curva que pase por el punto $x = 0$, $y = 1$:

$x^2(dy + x^2\,dx) = a(xy - 1)dx.$

1-86. $\dfrac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = -\cos^2 x.$

1-87. $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} - x^2 = -xy.$

1-88. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1 + 3x^2}{x(1 + x^2)}y = x\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right),$

Integrar, y calcular la constante para que $y = 0$. si $x = 1$

1-89. Integrar $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3y}{x} = x.$

y trazar la curva que pase por el punto $x = 1$, $y = 0$.

1-90. $2x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{2}{x}.$

1-91. $x\dfrac{dy}{dx} + \operatorname{Log} x = y.$

1-92. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{xy}{x^2 - 1} = x.$

1-93. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{n}{x}y = \dfrac{a}{x^n}.$

1-94. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{n}{x}y = e^x x^n.$

1-95. $x^2\,dy + y\,dx = ax^2 e^{-x}\,dx$ (dividir todo por x^2).

Ecuaciones de Bernoulli:

1-96. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = -x^3y^4.$

1-97. $\dfrac{x\,dy}{dx} + y = y^2 \operatorname{Log} x.$

1-98. $\cos x\dfrac{dy}{dx} - y \operatorname{sen} x = -y^2.$

1-99. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x^2y^2.$

1-100. $3\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2}{xy^2}.$

1-101. $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^3.$

1-102. $(1 - t^2)\dfrac{d\theta}{dt} - t\theta = 4t\theta^2.$

1-103. $2x\dfrac{dy}{dx} + y = -3x^2y^2.$

1-104. $x\dfrac{dy}{dx} - y = -\dfrac{y^3}{4}.$

1-105. $3\dfrac{dy}{dx}\cos x + y \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{y^2}.$

1-106. $(1 - x^3)\dfrac{dz}{dx} + 3x^2z + z^2 = 0.$

Ecuaciones de Lagrange:

1-107. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dx}{dy} = 2y.$

1-108. $x + yy' = a + by'.$

1-109. $x\dfrac{dy}{dx} + y = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3.$

1-110. $y^2(1 + y'^2) = 2(x + yy')$, (se pondrá $y' = u$).

1-111. $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2 \operatorname{Log} x.$

1-112. $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3y^3.$

1-113. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0.$

1-114. $\dfrac{dy}{dx} + x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = y.$

Ecuaciones de Clairaut:

1-115. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a.$

1-116. $(1 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$

1-117. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} - x = 0.$

1-118. $y = x\frac{dy}{dx} - \frac{4}{27}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$

1-119. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} = y.$

Trayectorias ortogonales:

1-120. De las curvas $xy = K.$

1-121. De los círculos $x^2 + y^2 + 2y - K^2 = 0.$

1-122. De las rectas $y = Kx.$

1-123. De los círculos $x^2 + y^2 = 2Ky.$

1-124. De las cardiodes $\rho = a(1 - \cos\theta).$

1-125. Determinar las trayectorias ortogonales de las parábolas que se deducen de la parábola $y^2 = 2px$, por una traslación paralela al eje Ox.

1-126. De las elipses $3x^2 + y^2 = Cx.$

1-127. De las estrofoides $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2).$

1-128. De las elipses $3y^2 + x^2 - Cy = 3a^2.$

1-129. De las curvas $y^2 = \frac{x^3 - a^3}{3x}.$

1-130. De las cisoides $y^2 = \frac{x^3}{a - x}.$

1-131. De las curvas $y = Cx^n.$

1-132. De las curvas $y^2 - 2Cx = 0.$

1-133. De las curvas $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{C} - 1 = 0.$

1-134. De las curvas $(x^2 + y^2)^2 = Cxy.$

CAPITULO II

Problemas para resolver

Por ecuaciones diferenciales de primer orden

2-1. Un recipiente cilíndrico vertical de sección $S = 10$ decímetros cuadrados y de altura $h = 36$ cm está lleno de agua. En la base se abre un grifo cuya sección es $s = 10$ cm^2. Calcular el tiempo necesario para que el recipiente se vacíe: la velocidad del agua a la salida siendo $v = \sqrt{2gh}$ y la salida del desagüe siendo 0,6 sv.

2-2. Un tren parte de una estación a una velocidad $v = t^3 - 21t^2 + 30t$ kilómetros por hora. Calcúlese:

1.º Su distascia x a la estación.

2.º ¿Durante cuánto tiempo ha ido marcha atrás?

3.º ¿A qué hora ha pasado por la estación?

4.º En la distancia recorrida por el tren, ¿cuándo ha pasado por la estación la última vez?

2-3. Un móvil parte del origen O y en t segundos su velocidad es $12t$ en la dirección Ox y $4t^2 - 9$ en la dirección Oy. Calcular:

1.º Las distancias recorridas paralelamente a cada eje, en función del tiempo t.

2.º La ecuación de la trayectoria $y = f(x)$.

2-4. Integrar la ecuación $x\dfrac{dy}{dx} + xy = 1$, y

1.º Trazar la curva que corta al eje de las x en $x = 1$.

2.º Calcular la superficie comprendida entre la curva, el eje de las x y la recta $x = l$.

3.º Calcular el radio de curvatura de la curva en el punto donde y es máximo.

4.º Calcular la abscisa y la ordenada del punto de inflexión.

2-5. La población de un país se duplica en 50 años. ¿En cuántos años se triplicará si el crecimiento de la población en función del tiempo es proporcional a la población?

2-6. Desde la ley de Newton sobre enfriamiento, la velocidad de variación de la temperatura de un cuerpo colocado en el aire, en función del tiempo, es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el aire ambiente. Si el aire está a 30° C y la temperatura del cuerpo desciende desde 100° C hasta 70° C en 15 minutos, calcular al cabo de cuanto tiempo será de 40° C.

2-7. Hallar la ecuación de una curva cuya pendiente en cada punto es proporcional al cuadrado de la abscisa x de este punto. ¿De qué tipo es esta curva?

2-8. Hallar una curva en la que la pendiente de la tangente en un punto cualquiera es igual a K veces la pendiente de la recta que une este punto con el origen.

2-9. Se colocan 1000 pesetas al 5 %. Si el interés es compuesto en cada instante, ¿cuánto se poseerá al cabo de 50 años

2-10. Hallar una curva tal, que en cada punto la subtangente sea igual al cuadrado de la abscisa.

2-11. Una bobina de resistencia eléctrica $R = 15\Omega$ y de inductancia propia de 3 henrys, se coloca sobre una diferencia de potencial sinusoidal $v = 110 \text{ sen } 120\ \pi t$ voltios, con $i = 0$ para $t = 0$. Calcular $i = f(t)$.

2-12 Un circuito eléctrico que comprende, en serie, un condensador de capacidad $C = 10^{-3}$ faradios y una resistencia $R = 10$ ohmios, se coloca sobre una diferencia de potencial sinusoidal $v = 100 \text{ sen } 120\ \pi t$ voltios.

Calcular:

1.° La carga q del condensador si, para $t = 0$, $q = 0$.

2.° La intensidad i de la corriente si, para $t = 0$, $i = 5$A.

CAPITULOS III y IV

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Ecuaciones sin segundo miembro o incompletas

Resolver las ecuaciones:

3-1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0.$

3-2. $2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0.$

3-3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} = 0.$

3-4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0.$

3-5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 10\dfrac{dy}{dx} + 26y = 0.$

3-6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = y.$

3-7. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - 6\dfrac{d\theta}{dt} - 2 = -8\theta.$

3-8. $y'' + 4y = 0.$

3-9. $y'' - 2y' + 5y = 0.$

3-10 $9y'' - 6y' + y = 0$

3-11. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -12y.$

3-12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 18y.$

3-13. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - 10\dfrac{d\theta}{dt} + 25\theta = 0.$

Integrar $\frac{d^2x}{dt^2} = -20x$ y calcular $x = f(t)$ bajo las siguientes condiciones:

3-14. 1.º si $t = 0$, $x = 0{,}5$, $\frac{dx}{dt} = 0$,

3-15. 2.º si $t = 0$, $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 4$,

3-16. 3.º si $t = 0$, $x = 0{,}5$, $\frac{dx}{dt} = 4$.

3-17. a $\frac{d^2x}{dt^2} = 20x$.

3-19. Calcular $x = f(t)$ con las tres condiciones iniciales del problema anterior.

3-20 a $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 20x = 0$.

3-22. Calcular $x = f(t)$ con las tres condiciones iniciales del problema anterior.

3-23. a $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$.

3-25. El mismo problema e iguales condiciones iniciales.

3-26. a $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0$.

3-28. El mismo problema e iguales condiciones iniciales.

3-29. $L\frac{d^2v}{dt^2} + R\frac{dv}{dt} + \frac{v}{C} = 0$.

Calcular $v = f(t)$, con las condiciones:

$R = 100\Omega$, $C = 5 \cdot 10^{-7}$ faradios, $L = 10^{-3}$ henrys.

Si $t = 0$, $V_0 = 500$ y $\frac{dv}{dt} = 0$.

3-30. El mismo problema pero con $L = 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ H, e iguales condiciones iniciales.

3-31. El mismo problema con $L = 8 \cdot 10^{-3}$ H, e iguales condiciones iniciales.

Ecuaciones con segundo miembro variable

Resolver las ecuaciones:

3-32. $\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 4e^t$.

3-33. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - 4\dfrac{d\theta}{dt} + 8\theta = 2t + 7.$

3-34. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{ds}{dt} - 6s = 10e^{2t}.$

3-35. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 2 \operatorname{sen} x.$

3-36. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = x^2 + 2x + 4.$

3-37. $2y'' - y' - y = 3 \cos 2x - \operatorname{sen} 2x.$

3-38. $y'' + 2y' + 5y = 2e^{3x}.$

3-39. $3y'' - 2y' - y = x^2.$

3-40. $y'' - 2y' + 3y = \operatorname{sen} x.$

3-41. $\dfrac{d^2\theta}{ds^2} + 2\dfrac{d\theta}{ds} + \theta = 8e^s.$

3-42. $y'' + 4y = e^x + \operatorname{sen} 2x.$

3-43. $y'' + 9y = \cos 3x.$

3-44. $y'' - 2y' + Ky = 0$, y discutir según los valores de K. Examinar los casos en que sea K = 1, 2 ó −3.

3-45. $y'' - \operatorname{sen} ax = -4y.$

3-46. $y'' - 3y' + 2y = x^3 + \operatorname{sen} x.$

3-47. Integrar la ecuación siguiente, y calcular y, anulándose para $x = 0$, así como su derivada y':

$$y'' + y' - 2y = e^x - x - 1$$

y determinar si y pasa por un máximo o mínimo para $x = 0$.

3-48. $y'' - 2y' + y = \operatorname{cosec} x.$

3-49. $y'' \cos x + y' \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}^2 x$ (se dividirá por $\cos^2 x$).

3-50. $4y'' - y - 1 = 2x^2.$

3-51. $xy'' = 1.$

3-52. $\dfrac{y''}{x} = e^x.$

3-53. $x^2y'' = a.$

3-54. $y'' + 4y' + 4y = e^{2x} + e^{-2x}.$

3-55. $y'' + 2y' + y = \cos^3 x.$

3-56. $y'' - y = 1 + x^2.$

3-57. $y'' + y' = x^2 - 1$.

3-58. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - \dfrac{d\theta}{dt} = t - \operatorname{sen} 2t$.

3-59. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - a^2s = 1 + t$,

3-60. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + a^2s = \cos ax$.

3-61. $y'' - 5y' + 6y = e^{nx}$.

3-62. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - 9\dfrac{d\theta}{dt} + 20\theta = t^2e^{3t}$

3-63. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = xe^x$.

3-64. $\dfrac{d^3\rho}{d\theta^3} = \operatorname{sen}^3\theta$.

3-65. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{a}{y^3}$.

3-66. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = x^2e^x$.

3-67. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{1}{(1+t)^2}$.

3-68. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\sqrt{y}}{3}$ (con la condición siguiente:

si $t = -1$, $y = 0$ y $\dfrac{dy}{dt} = 0$).

3-69 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} = -6x + 2$.

3-70. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 4\dfrac{ds}{dt} + 5s = 20\cos 3t$.

3-71. $\dfrac{d^2t}{ds^2} + 9t = 2\operatorname{sen} 3s$.

3-72. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} + y = x^3 + 6$.

3-73. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \operatorname{tg} y + \operatorname{tg}^3 y$ (con la condición siguiente:

si $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{4}$ y $\dfrac{dy}{dx} = 1$).

3-74. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 3y = \cos x \cdot e^{-x}$.

3-75. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 13y = 39$.

3-76. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = \dfrac{1}{2} + t$.

3-77. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 6\dfrac{dx}{dt} + 12x = 6t^2$.

3-78. $\dfrac{d^2\theta}{ds^2} - 2\dfrac{d\theta}{ds} - 3\theta = e^{2s}$.

3-79. $\dfrac{d^2s}{d\theta^2} - 2\dfrac{ds}{d\theta} + s = 6e^{\theta}$.

3-80. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 9x = 6\cos 3x$.

3-81. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 6\dfrac{dx}{dt} + 13x = 30 \operatorname{sen} t$.

3-82. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - 2\dfrac{d\theta}{dt} + 5\theta = 17 \operatorname{sen} 2t$.

3-83. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = x^2 - 2\cos x$.

3-84. $\dfrac{d^3\theta}{dt^3} = \operatorname{sen}^3 t$.

3-85. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{1}{\sqrt{ay}}$

3-86. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{K}{y^3}$.

3-87. $4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 9x$.

3-88. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} - 3x = 4e^{3t} - 12$.

3-89. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 2te^t = 3s$.

3-90. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y - 16 = -5 \operatorname{sen} 3t$.

3-91. $4\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \theta = 4 \operatorname{sen} \dfrac{t}{2}$.

3-92. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 1 = \operatorname{cosec} x.$

3-93. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + n^2x = a \cdot \operatorname{sen} 2\pi ft$

Calcular $x = f(t)$, con las condiciones siguientes:

$$a = 1, \qquad b = 1{,}5, \qquad n^2 = 4, \qquad f = 0{,}25.$$

Tipos especiales

Integrar las ecuaciones

3-94. $y''y + y'^2 = -4$ (se pondrá $y' = p$, después de separar variables).

3-95. $y''y = y^2 + 2y'^2$ (igual procedimiento).

3-96. $y''y = 2y'(1 + y')$ (igual procedimiento).

3-97 $y''y = y'(1 + y')$ (igual procedimiento).

3-98. $y''y = 1 + y'^2$ (igual procedimiento).

3-99. $y'' = y'^2(1 + 2x)$ (igual procedimiento).

3-100. $(1 + x^2)y'' + (1 + x)y' = 2$ (igual procedimiento).

3-101. $yy'' = y' + y'^2 \left(\text{poner } y'' = y' \cdot \dfrac{dy'}{dy}\right).$

3-102. $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 0$ (poner $y' = p$).

3-103. $\dfrac{d^2v}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dv}{dr} = 0 \left(\text{poner } \dfrac{dv}{dr} = p\right).$

CAPITULO V

Problemas para resolver por ecuaciones diferenciales de segundo orden

5-1. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, tiene una tangente horizontal en este punto, para la que se verifica siempre

$$y'' = y.$$

5-2. Hallar la ecuación de la curva cuya tangente a la misma está inclinada 45° en el punto $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ y para la que se verifica siempre

$$y'' = x + y.$$

5-3. Hallar la ecuación de una curva tal, que la proyección del radio de curvatura sobre el eje de las y sea constante e igual a a.

5-4. Demostrar que el radio de curvatura en un punto de la cónica $y^2 = 2ax + bx^2$ es proporcional al cubo de la normal en este punto, limitado por el eje Ox de la curva.

5-5. Hallar la ecuación de la curva en la cual el radio de curvatura es igual en cada punto al cuadrado de la segunda derivada:

$$R = y''^2.$$

Hallar la ecuación del movimiento $x = f(t)$ de una masa material m que se desplaza verticalmente hacia arriba cuando:

5-6. 1.° la resistencia al movimiento es proporcional a la velocidad v.

5-7. 2.° es proporcional al cuadrado de la velocidad v.

5-8. Hallar la ecuación de la curva cuyo radio de curvatura en cada punto es igual a la longitud de la normal entre este punto y el eje de las x.

5-9. Hallar la ecuación del movimiento $x = f(t)$ de un móvil de masa m atraído por un punto fijo proporcionalmente a la distancia x, y sometido a una fuerza resistente, proporcional a la velocidad. Discútase.

5-10. Calcular la flexión de una viga ligada en un extremo y cargada con un peso P en el otro.

5-11. Calcular la flexión de una viga ligada en un extremo y *uniformemente* cargada con p kg por metro.

5-12. Un móvil se desplaza sobre una recta una distancia D hacia el centro fijo O que le atrae con una fuerza $\frac{K}{x^3}$. Si el móvil está en reposo en el tiempo $t = 0$, ¿cuánto tiempo necesitará para llegar al centro O?

5-13. Si se supone que la gravedad varía en razón inversa del cuadrado de la distancia al centro de la tierra, ¿cuál será la velocidad adquirida por una masa m que cae del infinito a la superficie de la tierra, despreciando la resistencia del aire?

5-14. Sea la ecuación $\frac{d^2\theta}{dt^2} + 4\theta = 8t^2$, calcular θ sabiendo que, para $t = 0$, $\theta = 2$ y $\frac{d\theta}{dt} = 0$.

5-15. Sea la ecuación $\frac{d^2\theta}{dt^2} + 4\theta = 4 \cos 2t$. Calcular θ sabiendo que, para $t = 0$, $\theta = 0$ y $\frac{d\theta}{dt} = 2$.

5-16. La descarga de un condensador eléctrico produce una corriente i que viene dada por la ecuación $\frac{d^2i}{dt^2} = -K^2i$. Calcúlese $i = f(t)$, si $K = 500$ y calcúlese también la frecuencia.

5-17. Un volante gira a gran velocidad. En un momento determinado $t = 0$, se hace actuar una fuerza retardatriz, y el ángulo de rotación θ del volante, sigue entonces la ley: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -4$. Calcular $\theta = f(t)$ si se supone que en el tiempo $t = 0$, la velocidad es de 240 revoluciones por minuto. ¿Al cabo de cuántos segundos se parará y cuántas vueltas habrá dado?

5-18. Se dispara horizontalmente una bala de fusil sobre un alfaque donde la resistencia a la penetración es igual a la raíz cuadrada de la velocidd. ¿Al cabo de cuánto tiempo se detendrá la bala, si la velocidad es de 30 m/seg. en el momento de la penetración?

5-19. Un huso de 450 kg de peso, se desplaza siguiendo una línea recta a la velocidad de 100 m/seg. en el momento en que la fuerza motriz cortase bruscamente. Si la resistencia del aire es proporcional a la velocidad e igual a 45 N cuando la velocidad es de 100 metros por segundo, ¿qué distancia recorrerá antes de que la velocidad descienda a 7,50 m/seg. y cuántos segundos transcurrirán antes de que esta reducción de velocidad se haya producido?

5-20 y 5-21. Un circuito eléctrico cerrado, comprende en serie una bobina de resistencia $R = 20\Omega$, cuya inductancia propia es de 0,1 henrys, y su capacidad de 25 μF. Calcular la carga $q = f(t)$ y la intensidad de la corriente $i = f(t)$, con las siguientes condiciones para $t = 0$:

a) $q = 0{,}5$ culombios, $i = \dfrac{dq}{dt} = 0$,

b) $q = 0{,}05$ culombios, $i = -0{,}2$ A.

5-22. Un circuito comprende en serie una bobina cuya resistencia es $R = 100\Omega$, la inductancia propia $L = 0{,}01$ h, un condensador $C = 100$ μF y una fuente continua cuya diferencia de potencial constante es $V = 100$ voltios. Calcular $i = f(t)$ si, para $t = 0$, $q = 0$, e $i = 0 \left(i = \dfrac{dq}{dt} \right)$.

5-23. El mismo problema pero la diferencia de potencial v es sinusoidal, $v = 100 \cos 200\, t$. Calcular $q = f(t)$ e $i = f(t)$.

CAPITULO VI

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

(*con coeficientes constantes*)

Resolver los sistemas siguientes:

6-1. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y - 5, \qquad \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x + 4$

6-2. $\dfrac{dx}{dt} = 5x - y - 13, \qquad \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y - 10.$

6-3. $\dfrac{dy}{dx} - 11y - 16z = 1 + x, \qquad \dfrac{dz}{dx} + 2y + z = 1 - x$

6-4. $\dfrac{dy}{dx} + a^2z = 0, \qquad \dfrac{dz}{dx} + b^2y = 0.$

6-5. $\dfrac{dy}{dx} - y = 5z, \qquad \dfrac{dz}{dx} + y = -3z.$

6-6. $\dfrac{ds}{d\theta} - 17s = 40t, \qquad \dfrac{dt}{d\theta} + 3s = -6t + \theta.$

6-7. $\dfrac{dy}{d\theta} - y = \theta + z, \qquad \dfrac{dz}{d\theta} + 4y + 3z = 2\theta.$

6-8. $\dfrac{dy}{dx} = 3y + z, \qquad \dfrac{dz}{dx} = y + 3z + e^{ax},$

y discutir la forma de las integrales de acuerdo con los valores dados a la constante a.

6-9. $\dfrac{dy}{dx} = 2z + 4y + e^{2x}, \qquad \dfrac{dz}{dx} = 4z + 2y + e^{3x}.$

6-10. $\dfrac{dx}{dt} = y, \qquad \dfrac{dy}{dt} = -x + t,$

y calcúlese x e y para que, si $t = 0$, se tenga $x = 0$ e $y = 0$. Si x e y son las coordenadas de un punto, este punto engendra una curva cuando varía t. Trazar esta curva y calcular la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje Oy de la longitud de la curva, obtenida haciendo variar t desde 0 hasta 2π.

6-11. $\dfrac{dx}{dt} = x - y, \qquad \dfrac{dy}{dt} = x + y.$

6-12. $\dfrac{dx}{dt} = x - y - t - 2, \qquad \dfrac{dy}{dt} = y + t.$

6-13. $\dfrac{d\theta}{dt} = 2\theta - s, \qquad \dfrac{ds}{dt} = \theta + 4s - 5 \operatorname{sen} t.$

6-14 $\dfrac{dy}{dt} = 2y + 4z + e^{at}, \qquad \dfrac{dz}{dt} = 2z + 4y + e^{at}.$

6-15. $\dfrac{dx}{dt} = -ay, \qquad \dfrac{dy}{dt} = ax.$

6-16. $\dfrac{dx}{dt} = y - 7x, \qquad \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y.$

6-17. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \qquad \dfrac{dy}{dt} = x + y.$

6-18. $\dfrac{dx}{dt} + 5x + y = e^t, \qquad \dfrac{dy}{dt} + 3y - x = e^{2t}.$

6-19. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g.$

6-20. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -ax, \qquad \dfrac{d^2y}{dt^2} = -ay.$

6-21. $\dfrac{dx}{dt} = a(x - y), \qquad \dfrac{dy}{dt} = b(y - x).$

6-22. $\dfrac{dx}{dt} - Ky = -a \operatorname{sen} t, \qquad \dfrac{dy}{dt} - Kx = a \cos t,$

y examinar el caso en que $K = 2$.

6-23 $\dfrac{d\theta}{dt} + 4\theta - 7z = 0, \qquad \dfrac{dz}{dt} = 7\theta + 10z.$

6-24. $\dfrac{dz}{dx} = y, \qquad \dfrac{dy}{dx} = z.$

6-25. $\dfrac{dy}{dt} = t - 2y - z, \qquad \dfrac{dz}{dt} = -4y + z + e^{-t}.$

6-26. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - x - 4y = e^{5t}, \qquad \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2x - 3y = e^{2t}.$

6-27. $2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 3x = e^t, \qquad \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 2y = \operatorname{sen} 2t.$

6-28. $2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 4x - y = e^t, \qquad \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = 0.$

6-29. $\dfrac{dx}{dt} = x - y - t - 2, \qquad \dfrac{dy}{dt} = y + t.$

recta $x = 1$.

calcúlese $x = f(t)$ e $y = \varphi(t)$, de forma que para $t = 0$, se tenga $x = 0$, e $y = 0$. Trazar la curva y calcular:

1.º La superficie comprendida entre la curva, el eje de las x y la recta $x = 1$.

2.º La superficie comprendida entre la curva y la recta $x = 1$.

PARANINFO

MELENDEZ VALDES, 14 y 65 - MADRID-15